Chapitre I

Signaux et spectres

La transformation de Fourier est un des outils mathématiques qui trouve le plus d'applications aussi bien dans les domaines fondamentaux qu'appliqués. On peut citer par exemple l'optique, l'électronique, la numérisation, la spectroscopie ou le traitement d'images. L'étude des propriétés de cette transformation est donc particulièrement intéressante puisqu'elle permet une approche unifiée et très puissante de systèmes ou de problèmes différents.

La transformation de Fourier formalise, d'un point de vue mathématique, le concept intuitif de signal et de spectre. Un **signal** se présente à nous typiquement sous la forme d'une grandeur variant au cours du temps. Un son audible par exemple est une onde acoustique qui oscille avec une période comprise entre 50 ms et 50 μs. Ces variations sont trop rapides pour être perçues directement par l'oreille mais celle-ci est sensible à la fréquence de l'onde acoustique, dans une gamme de 20 à 20000 Hz. Cette caractérisation d'un signal dépendant du temps dans le domaine fréquentiel est une **analyse spectrale**. Le résultat de l'analyse spectrale, qui donne l'amplitude du signal en fonction de la fréquence est le **spectre** du signal. C'est une opération très puissante car il est souvent beaucoup plus facile de distinguer des composantes spectrales dans un signal que d'analyser directement les variations de celui-ci dans le temps. C'est ainsi que nous sommes capables de distinguer nettement la « nature » d'un son : la figure I.1 montre les spectres correspondant à la même note musicale jouée par deux instruments différents. Les deux spectres révèlent des pics situés aux mêmes fréquences mais d'amplitudes relatives différentes. Ce sont ces dernières qui nous permettent de distinguer ces deux sons. L'examen direct des signaux eux-mêmes, obtenus en enregistrant la tension au borne d'un microphone, aurait donné très peu d'indications. L'intérêt de l'analyse spectrale se retrouve dans l'examen de signaux comportant du bruit, en plus de composantes de fréquence bien définie. La figure I.2 présente par exemple un signal qui ne montre pas directement de périodicité, alors que son spectre comporte deux pics très nets à 20 et 50 Hz en plus d'une bande très large en fréquence et correspondant au bruit. Ce signal a été généré en effet en additionnant deux fonctions sinusoïdales de fréquences 20 et 50 Hz à un signal aléatoire.

Les trois premiers chapitres de cette partie décrivent les propriétés de la transformation de Fourier ainsi que celles des fonctions usuelles en analyse spectrale. Nous verrons ensuite, dans les quatrième et cinquième chapitres, quelques applications de la transformation de Fourier en traitement du signal, optique et échantillonnage.

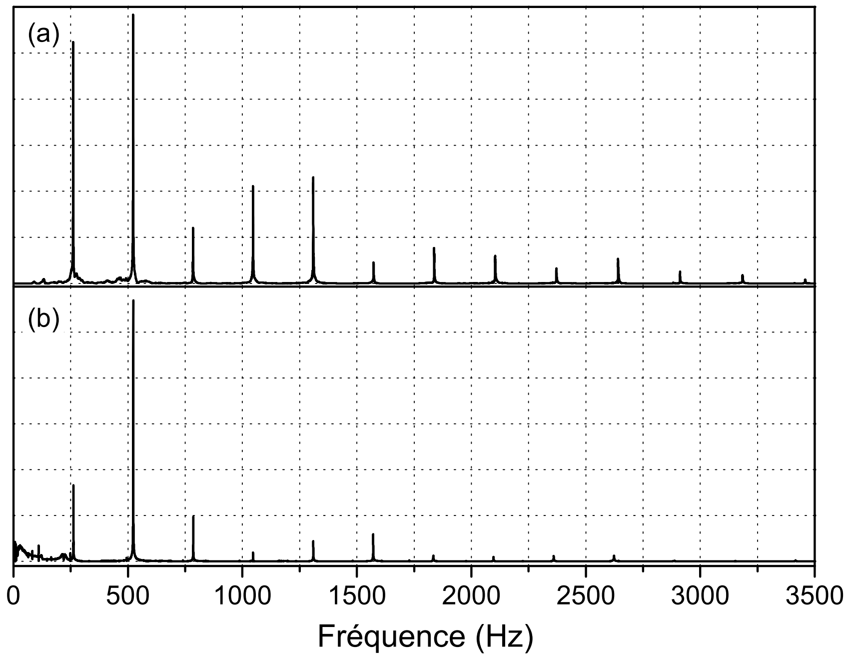

FIG. I.1 – *Spectres d'une même note musicale jouée par un piano (a) et une guitare (b).*

I.1 Transformation de Fourier

I.1.1 Définitions

Un certain nombre de conventions sont utilisées dans cette partie. On distingue tout d'abord deux types de fonctions. Les **fonctions signal** ou « signal » dépendent du temps, comme dans les exemples précédents, ou de coordonnées spatiales. Les **fonctions spectres** ou « spectre » dépendent d'une *fréquence* temporelle ou spatiale. Toutes ces fonctions sont a priori à *valeurs complexes*.

Les notations suivantes sont adoptées dans la suite. Les **fonctions signal** sont notées en lettres minuscules : f, g,... Leur argument est noté x de façon générale ou lorsqu'il s'agit d'une coordonnée spatiale[1] et t dans le cas d'un temps. Les **fonctions spectre** sont représentées par des lettres majuscules : F, G,... Leur argument, qui est une fréquence, est noté s qu'elle soit temporelle (unité : Hz) ou spatiale (unité : m^{-1}). On sera parfois amené à noter une fonction en explicitant son argument pour simplifier les expressions. Par exemple, la « fonction $f(x - x_0)$ » désigne en fait la fonction g définie par $g(x) = f(x - x_0)$.

La **transformation de Fourier** permet d'associer un spectre à un signal. Le spectre est en général *équivalent au signal* : il existe une opération - la **transformation de Fourier inverse** - qui permet de retrouver un signal à partir de son spectre. Ce dernier donne en particulier les fréquences des composantes du signal, au sens intuitif évoqué ci-dessus. Le spectre ne se limite cependant pas à cela : en effet, des fonctions différentes peuvent présenter les mêmes composantes en fréquence. Par exemple, si t représente le temps en seconde, les fonctions $f(t) = \cos(2\pi t)$ et $g(t) = \sin(2\pi t)$

1. Dans un premier temps, on s'intéresse à des fonctions ne dépendant que d'une seule variable. Le cas des variables multiples est traité au paragraphe III.6.

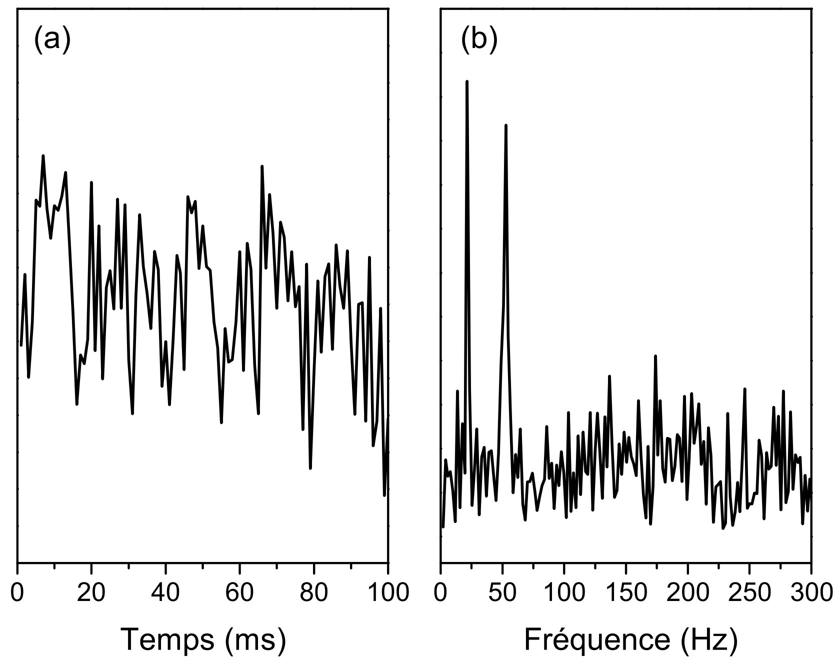

FIG. I.2 – *Signal comportant deux composantes sinusoïdales à 20 Hz et 50 Hz et du bruit (a). Sur le spectre correspondant, deux pics apparaissent aux fréquences des sinusoïdes (b).*

oscillent toutes deux à une fréquence de 1 Hz ; si leurs spectres étaient identiques, on en déduirait que $f = g$ par application de la transformation de Fourier inverse. Comme on le verra au chapitre II, $\sin(x)$ et $\cos(x)$ ont bien des spectres différents.

Pour faciliter la lecture, les fonctions spectre et signal associées sont désignées par la même lettre, en respectant la convention minuscules/majuscules. Ainsi le spectre de $f(x)$ est noté $F(s)$. Le passage de l'une à l'autre de ces fonctions est noté[2] :

$$f \xrightarrow{TF} F \quad \text{et}$$
$$F \xrightarrow{TF^{-1}} f.$$

Comment passer de f à F ? Les équations ci-dessous répondent à cette question. Pour toutes valeurs de x et de s entre $-\infty$ et $+\infty$, on a :

1. **Transformation de Fourier**, $f \xrightarrow{TF} F$:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}\,\mathrm{d}x \tag{I.1}$$

2. **Transformation de Fourier inverse**, $F \xrightarrow{TF^{-1}} f$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{+i2\pi xs}\,\mathrm{d}s. \tag{I.2}$$

2. L'exposant -1 dans TF^{-1} désigne simplement la transformation de Fourier inverse.

Ces définitions appellent quelques commentaires.

1. Les domaines d'intégration comprennent toutes les valeurs possibles de x ou de s. Si l'on considère une fonction signal ayant le temps t comme argument, ceci signifie que son spectre tient compte de l'ensemble du déroulement temporel de celle-ci et est *indépendant du temps*. Le formalisme de Fourier n'est pas conçu pour donner un spectre « en temps réel ». Il existe d'autres transformations comme la transformation en ondelettes qui permettent d'intégrer un paramètre temporel dans les spectres.
2. L'argument des fonctions exponentielles doit être sans dimension : lorsque x a une dimension de temps ou d'espace, s a bien une dimension de fréquence temporelle (Hz ou s^{-1}) ou spatiale (m^{-1}).
3. Il est nécessaire d'intégrer des fonctions a priori à valeurs complexes, ce qui se fait en sommant les intégrales des parties réelles et imaginaires. Si $f(x) = \mathrm{Re}[f(x)]+i\mathrm{Im}[f(x)]$ où $\mathrm{Re}[f(x)]$ et $\mathrm{Im}[f(x)]$ sont les parties réelles et imaginaires de $f(x)$, alors :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}[f(x)]\ \mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}[f(x)]\ \mathrm{d}x. \tag{I.3}$$
4. Pour une fonction signal f à valeurs réelles, le spectre F est a priori à valeurs complexes. Ceci peut paraître contraire à l'intuition que l'on peut avoir d'un spectre. De même, la variable s prend des valeurs négatives. Ces deux caractéristiques sont cependant indispensables pour pouvoir reconstruire une fonction à partir de son spectre, comme nous le verrons au paragraphe II.1.
5. Il existe des **définitions alternatives** aux équations (I.1) et (I.2). Si les propriétés générales de la transformation de Fourier sont indépendantes de la convention choisie, cette dernière peut affecter les coefficients de certaines expressions. Il faut également prendre soin de s'assurer des conventions adoptées dans les tables de transformées de Fourier ou dans les résultats de calculs numériques ou formels.

   Les **autres définitions** les plus courantes sont :

   Convention (b)
$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ixs}\ \mathrm{d}x$$
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(s)\mathrm{e}^{+ixs}\ \mathrm{d}s$$

   Convention (c)
$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ixs}\ \mathrm{d}x$$
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(s)\mathrm{e}^{+ixs}\ \mathrm{d}s$$

   Si une fonction $f(x)$ a pour transformée de Fourier $F(s)$ dans la convention adoptée ici alors :
   - $f(x)$ a pour transformée $F(s/(2\pi))$ dans la convention (b)

- $g(x) = f(x/\sqrt{2\pi})$ a pour transformée $G(s) = F(s/\sqrt{2\pi})$ dans la convention (c).

Exemple I.1 ✷ :[3] *Ces résultats s'obtiennent par simple changement de variable.* ✍ *Ainsi, dans le deuxième cas, on a :*

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ixs} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-ixs} \,\mathrm{d}x \\ &\text{et en posant } u = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \\ G(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi u(s/\sqrt{2\pi})} \sqrt{2\pi} \,\mathrm{d}u \\ &= F\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\right). \end{aligned}$$

I.1.2 Fonctions admettant une transformée de Fourier

Il nous faut maintenant aborder les questions de **l'existence de la transformée de Fourier** d'une fonction et de sa **relation avec la transformée inverse** :

- A quelles fonctions f l'équation (I.1) est-elle applicable ? Il s'agit ici de savoir à quelles conditions l'intégrale

$$\int_a^b f(x) e^{-i2\pi sx} \,\mathrm{d}x$$

  admet une limite lorsque a et b tendent indépendamment vers l'infini.
- Lorsque F peut être calculée à partir de f, peut-on appliquer la transformation de Fourier inverse à F pour retrouver f ?

Il est évidemment souhaitable que ces deux propriétés soient vérifiées pour le plus grand ensemble de fonctions possible. La limite exacte de celui-ci est difficile à déterminer et nous ne discuterons pas de ce problème essentiellement théorique. Nous nous contenterons de noter qu'il contient les *fonctions dont le module est intégrable et dont les discontinuités sont finies.*[4] Nous verrons un peu plus loin que certaines fonctions ne vérifiant pas cette condition peuvent néanmoins admettre une transformée de Fourier grâce à la fonction de Dirac. C'est la cas de $\sin(2\pi x)$ par exemple.

Plus précisément, la condition ci-dessus permet d'affirmer que pour une fonction f, à valeurs complexes, qui ne tend en aucun point vers $\pm\infty$ et pour laquelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x \tag{I.4}$$

3. Les exemples suivis du symbole ✷ peuvent être traités comme des exercices. Dans ce cas, il ne faut les lire que jusqu'au symbole ✍.

4. Certaines fonctions comportant une infinité de discontinuités dans un intervalle fini peuvent ne pas admettre de transformée de Fourier.

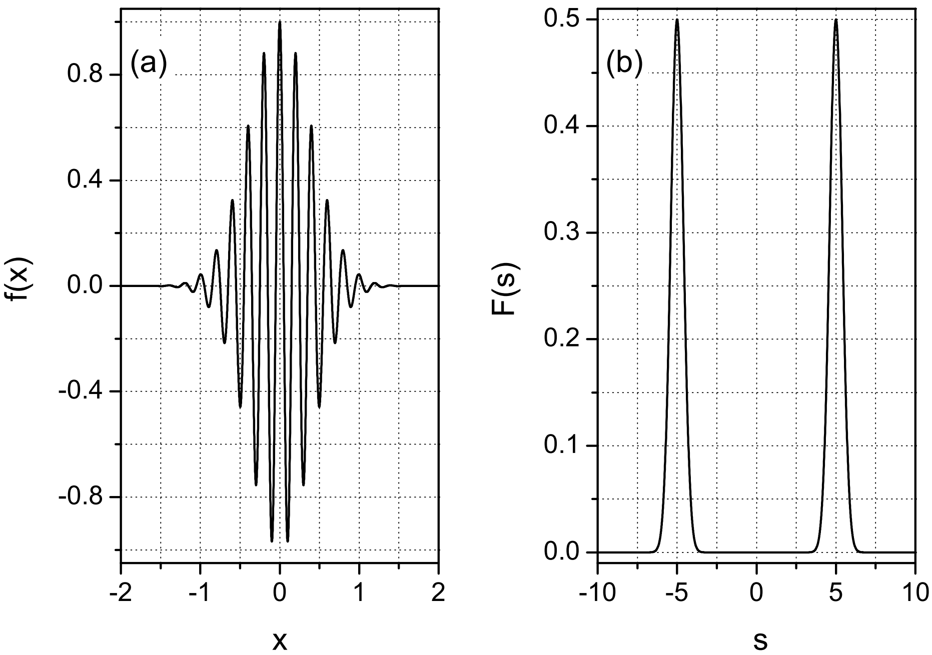

FIG. I.3 – *Fonction sinusoïdale amortie (a) et spectre correspondant (b).*

existe, on peut calculer $F(s)$ pour toute valeur s et la transformée inverse de F vaut f, sauf aux éventuels points de discontinuité de f. On a donc la relation :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi us} \, \mathrm{d}u \right] e^{+i2\pi xs} \, \mathrm{d}s$$

pour toutes valeur de x où f est continue.
Aux points x_d où f est discontinue, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i2\pi us} \, \mathrm{d}u \right] e^{+i2\pi xs} \, \mathrm{d}s = \frac{f(x_d^+) + f(x_d^-)}{2} \tag{I.5}$$

où $f(x_d^+)$, $f(x_d^-)$ est la limite de f lorsque x tend vers x_d à partir des valeurs respectivement supérieures ou inférieures à x_d.

Exemple I.2 : *Lorsque f admet une transformée de Fourier F, ces deux fonctions doivent contenir la même « information » puisque les formules* (I.1) *et* (I.2) *permettent de passer de l'une à l'autre. Vérifions qualitativement ceci sur une sinusoïde amortie (figure I.3). Si x représente le temps en secondes, la sinusoïde a une période de 0,2 s. Le graphe de la transformée de Fourier montre précisément des pics à $s = \pm 5$ Hz. D'autre part, ces pics ont une certaine largeur, qui traduit l'amortissement de la sinusoïde. En effet, celle-ci ne présente qu'un nombre fini d'oscillations de grande amplitude, ce qui ne permet pas de déterminer avec une très grande précision sa fréquence.*

Un premier exemple de fonctions admettant une transformée de Fourier est l'ensemble des fonctions qui sont *nulles en dehors d'un intervalle fini* et dont les discontinuités sont finies. Elle peuvent souvent décrire un signal physique, qui est toujours limité à un intervalle spatial ou temporel fini et dont les variations sont également finies. Pour ce type de fonctions, l'intégrale (I.1) se réduit alors à :

$$F(s) = \int_a^b f(x)e^{-i2\pi xs}\ \mathrm{d}x.$$

où a et b sont les bornes de l'intervalle pour lequel f est non nulle.

Exemple I.3 : *Les fonctions (voir figures I.7 et I.8)*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(\pi x) && \textit{pour } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ &= 0 && \textit{pour } x \leq -1/2 \textit{ ou } x \geq 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -x+1 && \textit{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ &= x+1 && \textit{pour } -1 \leq x \leq 0 \\ &= 0 && \textit{pour } x \leq -1 \textit{ ou } x \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 1 && \textit{pour } -0{,}5 < x < 0{,}5 \\ &= 0 && \textit{pour } x < -0{,}5 \textit{ ou } x > 0{,}5 \end{aligned}$$

sont toutes non nulles sur un intervalle fini. f_1 et f_2 étant également continues et f_3 ayant une discontinuité finie en a et b, ces trois fonctions admettent les transformées de Fourier F_1, F_2 et F_3. Les transformées inverses de F_1 et F_2 sont égales à f_1, f_2 ; ceci est également vrai pour F_3 et f_3 sauf aux points $x = -0{,}5$ et $x = 0{,}5$. Si on note g_3 la transformée inverse de F_3, on a :

$$g_3(0{,}5) = \frac{f_3(0{,}5^+) + f_3(0{,}5^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = 0{,}5.$$

La même formule s'applique au point a.

La modélisation d'un signal peut néanmoins faire intervenir des fonctions qui prennent des valeurs non nulles pour des arguments arbitrairement grand en valeur absolue. Un signal physique peut par exemple être non nul sur une très grande durée par rapport à un temps caractéristique d'observation. Des calculs plus simples peuvent alors être obtenus en prolongeant ce signal jusqu'en $x = \pm\infty$ plutôt que de spécifier explicitement ses limites qui n'ont de toute façon aucune influence sur l'observation. Les fonctions qui ne sont pas nulles en dehors d'un intervalle fini doivent, pour admettre une transformée de Fourier, tendre assez rapidement vers zéro en $x = \pm\infty$ de façon à ce que l'intégrale (I.4) puisse exister.

Exemple I.4 : *La fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$, dite gaussienne (Cf. paragraphe I.2.3), est non nulle pour toute valeur de x mais l'intégrale de son module vaut :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\pi x^2}|\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\ \mathrm{d}x = 1$$

où l'on a utilisé l'équation (I.26). *Elle admet donc une transformée de Fourier. De plus, cette fonction étant continue, on a bien : $f \xrightarrow{TF} F \xrightarrow{TF^{-1}} f$.*

Comme mentionné plus haut, certaines fonctions courantes ne vérifient pas les conditions d'existence de la transformée de Fourier. Par exemple, la fonction $f(x) = \sin(2\pi x)$ a un module qui n'est pas intégrable entre $-\infty$ et $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\ \mathrm{d}x = +\infty.$$

De même, une fonction constante n'est pas de module intégrable et ne possède pas, en principe, de transformée de Fourier. Il peut être cependant très utile de considérer le spectre de tels signaux et nous verrons que la fonction de Dirac permet de contourner ce problème.

Le calcul explicite des transformées et transformées inverses sera abordé au chapitre II.

I.1.3 Propriétés élémentaires

Intégration

D'après la définition (I.1), la valeur au point $s = 0$ de la transformée de Fourier F d'une fonction f est égale à l'intégrale de celle-ci :

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{I.6}$$

On a également :

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\ \mathrm{d}s.$$

Linéarité et conjugaison

La transformation de Fourier est linéaire : si f et g ont respectivement pour transformées de Fourier F et G alors pour tous nombres complexes a et b, $af + bg$ a pour transformée de Fourier $aF(s) + bG(s)$.
En effet, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [af(x) + bg(x)]e^{-i2\pi xs}\ \mathrm{d}x &= a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}\ \mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i2\pi xs}\ \mathrm{d}x \\ &= aF(s) + bG(s). \end{aligned}$$

Il faut prendre garde à l'opération de conjugaison : si f a pour transformée de Fourier F, la fonction complexe conjuguée de f, notée f^*, *n'a pas en général* pour transformée de Fourier F^*, fonction complexe conjuguée de F.
On a d'une part :

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}\ \mathrm{d}x\right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)e^{+i2\pi xs}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$