Révisions d'analyse 1

Compétences

On cherchera à :

- Savoir calculer une dérivée en utilisant un taux d'accroissement ou à l'aide des formules usuelles *Exercices 1 à 6.*
- Savoir utiliser le théorème des accroissements *Exercice 7.*
- Savoir utiliser la convexité d'une fonction *Exercices 8 à 11.*
- Savoir faire un développement limité et l'utiliser pour calculer une limite *Exercices 12 et 13.*
- Savoir appliquer le théorème de Rolle *Exercices 14 et 15.*
- Savoir étudier une suite *Exercices 16 et 17.*
- Savoir calculer la valeur d'une série à l'aide d'une série usuelle (série géométrique ou série exponentielle) *Exercices 18 et 19.*
- Savoir utiliser un critère de convergence pour les séries *Exercices 20 à 22.*
- Savoir calculer une intégrale en cherchant une primitive, en intégrant par parties, en faisant un changement de variable *Exercices 23 à 25.*
- Savoir utiliser les propriétés générales des intégrales *Exercice 26.*
- Savoir appliquer une formule de Taylor *Exercices 27 et 29.*
- Reconnaître une somme de Riemann *Exercice 30.*

Coup d'œil sur le chapitre

L'objectif de ce premier chapitre est de consolider les acquis de première année en analyse. Ces exercices permettent de revoir toutes les techniques de calcul qu'il est indispensable de maîtriser pour réussir en ECS2. Il faut être capable de transformer une expression par des opérations algébriques dans le but d'étudier un signe, de montrer une inégalité, de calculer une limite, de trouver une primitive, etc.

La dérivation tient une place importante dans la première partie de ce chapitre. Il faut savoir dériver une fonction usuelle en utilisant la dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. Pour certains exercices, en général plus difficiles ou plus théoriques, il est parfois nécessaire de revenir à la définition du nombre comme limite d'un taux d'accroissement.

Lors d'un le calcul de limite, en présence d'une forme indéterminée, il faut savoir utiliser la « bonne » méthode : le plus souvent reconnaître une croissance comparée ou utiliser un développement limité.

L'étude d'une suite consiste essentiellement à étudier sa monotonie et sa convergence. Il faut savoir appliquer les théorèmes des suites monotones, des suites adjacentes et bien sûr le théorème d'encadrement.

Pour le calcul d'intégrales, deux techniques doivent être maitrisées : le changement de variable et l'intégration par parties qu'il faut savoir soigneusement justifier.

Le saviez-vous ?

Epsilon est la cinquième lettre de l'alphabet grec. Contrairement à êta qui était légèrement diphtongué, il se prononçait sans doute à peu près comme notre é en français. Ceci explique son nom de é pur, de la signification de l'adjectif grec *psilos*.

On doit au mathématicien allemand Karl Weierstrass les définitions de continuité et limites utilisées de nos jours. Pourquoi a-t-il choisi d'utiliser les lettres epsilon et êta ? Nous ne le savons pas. C'est cependant devenu l'habitude au point que nombre de gens emploient l'expression c'est epsilon là ou d'autres, inspirés par d'autres références, préfèrent affirmer : *c'est peanuts*. L'adjectif *epsilonesque* est même parfois utilisé pour qualifier quelque chose de très petit.

Énoncés des exercices

Dérivation de fonctions, développements limités

Exercice 1.

Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f \;: x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
2. $g \;: x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 2.

Démontrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. $\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad 2\arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

Exercice 3. *La série géométrique dérivée*

1. Réduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les valeurs de $q \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\displaystyle\sum_n nq^{n-1}$ est convergente.

   En cas de convergence calculer la somme.

Exercice 4.

Pour chaque fonction suivante, déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité, calculer la fonction dérivée et étudier les variations.

1. $f : x \longmapsto a^x$ où a est un réel strictement positif.
2. $g : x \longmapsto x^a$ où a est un réel non nul.
3. $h : x \longmapsto x^x$

Exercice 5.

Calculer la dérivée n-ième de la fonction :

$$f_n \;: x \longmapsto x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 6. *Un prolongement par continuité*

Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\arctan(x)}$ se prolonge par continuité en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. ($\star\star$) *Théorème de la limite de la dérivée*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$ et telle que la limite de la fonction f' en a existe et est finie.

Montrer que la fonction f est dérivable en a.

Exercice 8.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. On suppose qu'il existe trois points de la courbe de f qui sont alignés.

1. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f''(c) = 0$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 9. *Inégalités classiques*

Montrer en utilisant l'inégalité des tangentes pour les fonctions convexes :

1. $\ln(x) \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.
2. $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. $\arctan x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

Exercice 10. ($\star\star$) *Inégalité de Ky-Fan*

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \,]0,1[\,, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right).$$

1. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

2. En déduire l'inégalité :

$$\frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1-x_k)\right)^{1/n}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1-x_k)}$$

Exercice 11. ($\star\star$) *Inégalité de Karamata*

Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ deux n-uplets décroissants de réels appartenant à I ($n \geqslant 2$) tels que :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(y_i) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)f'(y_i)$.

2. On pose $\Delta_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)f'(y_i)$ et :

$$k \in [\![1, n]\!], \quad \hat{x}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad \hat{y}_k = \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

   Montrer que $\Delta_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(\hat{x}_i - \hat{y}_i)\big(f'(y_i) - f'(y_{i+1})\big)$.

3. En conclure que $\Delta_n \geqslant 0$ puis que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(y_i)$.

4. Montrer que si $I \subset]0, +\infty[$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i$.

Exercice 12.

Déterminer le développement limité lorsque x tend vers 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

$$f \ : x \longmapsto \cos(x)\sin(x), \quad g \ : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad h \ : x \longmapsto \mathrm{e}^{\tan(x)}.$$

Exercice 13. ($\star$)

Donner, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, un équivalent de :

$$\ln(1 + x^\alpha) - x,$$

1. lorsque x tend vers 0 ;
2. lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $a < b$.

On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur le segment $[a, b]$.

Montrer que si la fonction f s'annule $n+1$ fois sur $[a, b]$ alors la fonction $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

Exercice 15.

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et f une fonction T-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f' est T-périodique.
2. On suppose que f s'annule en p réels distincts appartenant à $[0, T[$ avec p un entier supérieur ou égal à 2.

   Montrer que f' s'annule au moins p fois sur $[0, T[$.

Suites et séries

Exercice 16.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer la valeur de :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}.$$

Exercice 17.

On pose $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour $n \geqslant 1$.

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 18.

Établir la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n + 1)x^n$ pour $|x| < 1$?

Exercice 19. $(\star\star)$

1. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Montrer que la série $\sum \dfrac{P(n)}{n!}$ est convergente.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n!}$.

Exercice 20. $(\star\star)$

On considère (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n-1} - 2.$$

1. Déterminer un équivalent de u_n.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 21. $(\star\star)$

Déterminer, suivant les valeurs des réels a, b et c, la nature de la série de terme général :

$$a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2).$$

Exercice 22. $(\star)$

1. Montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente si et seulement si la suite (u_n) l'est.
2. En déduire la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = 2\sqrt{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Intégration sur un segment

Exercice 23.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 t\ln(2t+1)\,\mathrm{d}t$.
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 24. *Lemme de Riemann-Lebesgue*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 26.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f est une fonction continue sur $[a, b]$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ alors f est positive.
2. Que peut-on dire de f lorsque $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$?

Exercice 27. *Fonction absolument monotone*

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$.

1. Montrer, en utilisant un résultat du cours que, pour tout $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle f(x) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Que peut-on en déduire pour la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$?
2. Soit $x \geqslant 0$, en appliquant le résultat précédent à la fonction $t \mapsto f(x+t)$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^k$ converge. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n = 0$
3. En conclure que pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Exercice 28. *La série exponentielle - démonstration d'un résultat du cours*

Soit x un réel et n un entier naturel. Montrer que :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{n!} \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\displaystyle\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.