Chapitre 1

Suites numériques

Problématique

- Modélisations de phénomènes discrets et de situations économiques.

Que vais-je bien pouvoir faire au ciel, durant toute l'éternité, si l'on ne me donne pas une infinité de problèmes à résoudre ?

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Points incontournables

- Suites géométriques (définition, propriété, somme), limite de la suite (q^n), suites arithmético-géométriques.

1. Suites géométriques

Quelques rappels

On rappelle qu'une suite numérique u_n est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n (notation indicielle). Ainsi :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n = u(n) \end{cases}$$

On rappelle aussi que l'on peut définir une suite (u_n) par :

- Par l'expression de u_n en fonction de n, c'est-à-dire par une formule explicite. Par exemple : pour tout $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
- Par récurrence : on donne le premier terme et une relation de récurrence entre un terme et le suivant. Par exemple :

$$u_n : \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Et en enfin, une suite peut être représentée graphiquement dans le plan. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$). $u_{1,5}$ n'a mathématiquement pas de sens et donc le point $(1{,}5;\, u_{1,5})$ non plus.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est géométrique si, à partir de son 1er terme, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.

Alors, il existe un réel q tel que, pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique (u_n) : il est égal au quotient entre deux termes consécutifs différents de 0 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Remarques

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être $q = 1$ sont nuls.
2. Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls. En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, **tous les termes de la suite sont différents de zéro.**
3. Si $q = 1$ la suite est constante égale à son 1er terme.

À retenir

n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang u_n. Par exemple, u_{n+1} est le terme de rang $n+1$ (le terme suivant u_n) alors que $u_n + 1$ est le terme de rang n augmenté de 1.

Attention !! (u_n) désigne la suite alors que u_n **désigne le terme de** rang n.

4. Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de démontrer que pour tout entier n le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (donc indépendant de n). Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples

- $\frac{1}{2} < 1$. Cette suite est géométrique puisque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{1}/2^{n+1}}{\cancel{1}/2^n} = \frac{1}{2}.$$

  (u_n) est une suite géométrique de raison 1/2 et de 1^er^ terme 1.

- $v_n = n^3$. Cette suite n'est pas géométrique puisque $v_1 = 1$, $v_2 = 8$, $v_3 = 27$. On voit que pour passer du 2^e^ terme au 3^e^ on multiplie par 8 et pour passer du 3^e^ au 4^e^ on multiplie par 27/8.

Évolutions en pourcentage sur quelques exemples

- Augmenter une grandeur de t % équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de t % équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \frac{t}{100}$.

Exemples

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1,5 % par an. On note C_n le capital disponible au bout de n années alors : $C_{n+1} = \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) \times C_n = 1,015 \times C_n$.
   Ainsi, (C_n) est une suite géométrique de raison 1,015 et de 1^er^ terme $C_0 = 200$.

2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4 % par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes. On note r_n la quantité de rejets l'année 2012 + n d'où : $r_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{100}\right) \times r_n = 0,96 \times r_n$. Ainsi, (r_n) à est une suite géométrique de raison 0,96 et de 1^er^ terme $u_0 = 50\,000$.

À retenir

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de t %, on peut définir une suite géométrique de raison :

$1 + \frac{t}{100}$ (augmentation)

ou $1 - \frac{t}{100}$ (diminution).

Propriété (formule explicite)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q_n$.

À retenir

Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence en une suite définie explicitement.

Plus généralement, on a : pour tous entiers p et n tels que :

$$0 \leq p \leq n, u_n = u_p \times q^{n-p} .$$

Exemples

1. Soit (u_n) la suite géométrique de raison ½ et de 1er terme 2.
   Alors, $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. D'où, $u_4 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$.
2. On reprend l'exemple du groupe industriel (cf plus haut). L'objectif de ce groupe est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40 %). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?

Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50\,000 \times 0{,}96^{10} \approx 33\,242 .$$

Avec une réduction de 4% par an, en 2022, l'objectif ne sera pas atteint par l'entreprise.

Sens de variation – un cas particulier

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q_n) est décroissante.
- Si $q > 1$, alors la suite (q_n) est croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (q_n) est constante (=1).
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q_n) n'est pas monotone.

À retenir

n est l'indice (ou le rang) Si $q = -1$, c'est ce qu'on appelle une suite « alternée » puisque suivant la parité de n, elle prend périodiquement les valeurs 1 et –1.

Exemples

1. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme, $\frac{1}{2} < 1$ la suite u est décroissante.
2. $v_n = 1{,}01^n$. Comme 1,01>1, la suite v est croissante.

Généralisation du sens de variation

(i) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison q.

- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

(ii) Si $u_0 < 0$ les résultats précédents s'inversent.

À retenir

n est l'indice (ou le rang)

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{(n+1)\ fois} = n + 1$$

Pour $q \neq 1$, on peut introduire le symbole sigma Σ afin de simplifier l'écriture :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Sommes des termes consécutifs de la suite (q^n)

Pour tout nombre réel $q \neq n$ et tout entier naturel n, on a :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2-\frac{1}{2^n}.$$

2. Limite de la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Etudier la limite d'une suite (u_n) c'est chercher ce que deviennent les termes (u_n) lorsque n devient très grand (on dit que « n tend vers l'infini ») ; plus précisément :

- Les termes u_n finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les termes u_n finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

En Terminale ES, on ne s'intéressera qu'aux suites $u_n = q^n$ du type où $q > 0$.

Propriété

- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. On dit que la suite $(q^n)_n$ converge vers 0.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. On dit que la suite $(q^n)_n$ diverge.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$. On dit que la suite $(q^n)_n$ converge vers 1.

À retenir

Si $q \leq -1$, alors $(q^n)_n$ n'admet pas de limite, finie ou infinie.

Exemples

1. Soit $u_n = 2^n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $q = 2 > 1$.

2. Soit $v_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Quelques compléments

(i) Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors, on a pour tous réels a et b :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n + b = b$.

(ii) Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors, on a pour tous réels a et b :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n = +\infty$ si $a > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} au_n = -\infty$ si $a < 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + b = +\infty$.

Exemples

1. Soit $u_n = 1 - \dfrac{1}{3^n}$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2. Soit $u_n = -2 \times 7^n$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

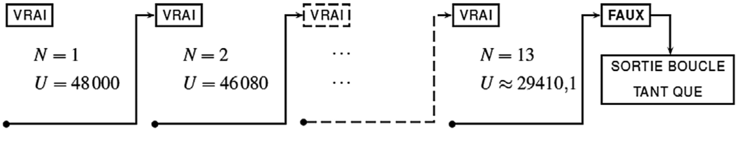
Recherche d'un seuil à l'aide d'un algorithme

Exemple 1 Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $u_0 = 50\,000$. Comme $0 < 0{,}96 < 1$, la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0. L'algorithme ci-dessous, permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000. C'est-à-dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, $50\,000 \times 0{,}96^n \leq 30\,000$.

Initialisation : Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 50 000
Traitement : Tant que $U > 30\,000$
    Affecter à N la valeur $N + 1$
    Affecter à U la valeur $0{,}96 \times U$
Fin Tant_que
Sortie : Afficher N

Le traitement de l'algorithme est le suivant :

Tant que la condition U>30 000 est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle « Tant que ».



En sortie, l'algorithme affiche 13. Donc, pour tout entier $n \geq 13$, on a $50\,000 \times 0{,}96^n \leq 30\,000$.

Exemple 2 Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2\,000$. Comme $1{,}015 > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

L'algorithme ci-dessous, permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 3 000. C'est-à-dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p$:

$$2\,000 \times 1{,}015^n \leq 3\,000.$$

En sortie, l'algorithme affiche 28. Donc, pour tout entier $n \geq 28$, on a $2\,000 \times 1{,}015^n > 3\,000$.

Initialisation : Affecter à N la valeur 0

Affecter à U la valeur 2 000

Traitement : Tant que $U \leq 3\,000$

Affecter à N la valeur $N + 1$

Affecter à U la valeur $1{,}015 \times U$

Fin Tant_que

Sortie : Afficher N

3. Suites arithmetico-géométriques

Définition

Soit a et b deux réels. On dit qu'une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** si elle est définie par la donnée de u_0 (son 1er terme) et de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

Cas particuliers

1. Si $a = 0$, (u_n) est constante à partir du rang 1 au moins.
2. Si $a \neq 0$, $b = 0$, (u_n) est géométrique de raison a.
3. Si $a = 1$, (u_n) est arithmétique de raison b.

Exemple

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$$

(u_n) est bien une suite arithmético-géométrique où $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 3$.

Représentation graphique

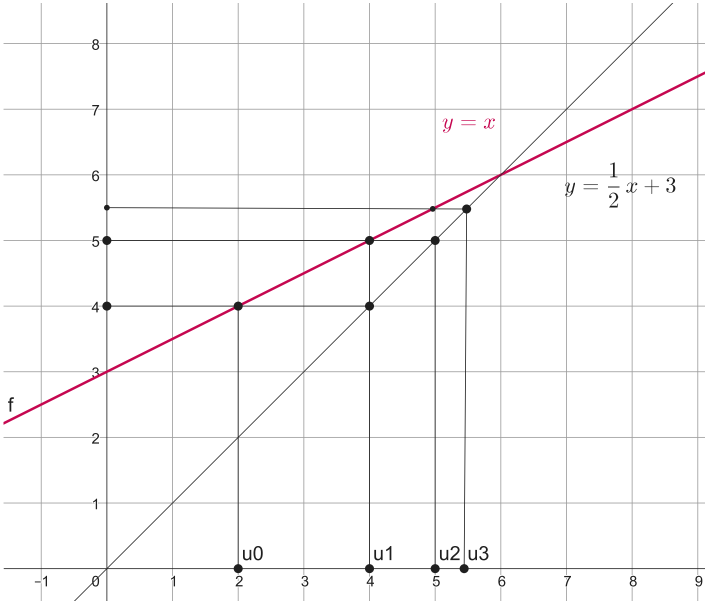
Soit a et b deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

(u_n) est la suite arithmético-géométrique définie par u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n + b$.

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

Exemple

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$$



On conjecture graphiquement que la suite converge vers 6.

On peut montrer que (u_n) s'exprime de la façon suivante :

$$u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6 .$$

Je me teste !

Dire si les énoncés sont vrais ou faux

- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0{,}5u_n + 4$ avec $u_0 = 2$. Alors, la suite v définie par $v_n = u_n - 8$ est géométrique de raison 0,5.
- En reprenant les mêmes hypothèses que ci-dessus, la suite (v_n) est strictement croissante.
- En reprenant les mêmes hypothèses, la suite (u_n) a pour limite −8.
- Soit la suite (w_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $w_1 = \frac{1}{3}$, alors on a :

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_8 = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^9}{1-\frac{1}{3}} .$$

Dernière minute

Ne pas oublier ce que c'est une suite géométrique et une suite arithmétique (retournez dans vos cours de première). Utilisez la calculatrice afin de regarder le comportement de la suite ou pour déterminer un seuil à l'aide du tableau de valeurs.