Chapitre premier

ESPACE VECTORIEL COMPLEXE

On appelle *espace vectoriel complexe* un ensemble E sur lequel sont définies des opérations d'addition des éléments et de multiplication des éléments par les nombres complexes, qui satisfont aux axiomes suivants:

1) E est stable pour ces deux opérations;
2) E est un groupe abélien pour l'opération d'addition;
3) la multiplication par un nombre complexe est une opération associative, commutative et doublement distributive par rapport à l'addition (des nombres complexes et des éléments);
4) le produit de l'unité par tout élément est égal à cet élément.

Les éléments d'un espace vectoriel *) sont appelés des *vecteurs* (parfois des *points*) et sont notés par les lettres minuscules de l'alphabet latin contrairement aux *nombres* (appelés des *scalaires*) qui, en règle générale, sont notés par les lettres minuscules de l'alphabet grec. D'après le contenu, le symbole 0 pourra désigner indifféremment le vecteur zéro (élément neutre du groupe) ou le nombre zéro.

En vertu des axiomes 1)-4) les opérations avec les vecteurs d'un espace vectoriel vérifient les mêmes règles que les opérations correspondantes avec les vecteurs au sens géométrique usuel.

Un exemple trivial d'espace vectoriel est donné par l'ensemble réduit à l'unique élément 0; les opérations sont définies par les égalités

$$0 + 0 = 0, \qquad \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0.$$

Cet espace est dit espace vectoriel trivial ou simplement espace trivial et on le désigne par le symbole 0.

Un autre exemple moins trivial d'espace vectoriel est donné par l'ensemble Φ_M de toutes les fonctions numériques définies sur un ensemble M. Ces fonctions sont appelées des *fonctionnelles.* L'addition des fonctionnelles et la multiplication des fonctionnelles par un nombre sont définies, de façon naturelle, comme pour les fonctions numériques ordinaires d'une variable numérique.

On peut concrétiser cet exemple en supposant que M est l'ensemble de tous les nombres naturels $\{1, 2, \ldots\}$ ou l'ensemble

*) Ici et dans la suite, sauf mention expresse du contraire, le terme «espace vectoriel» signifiera espace vectoriel complexe. Parallèlement à l'emploi du terme «espace vectoriel» nous dirons aussi brièvement «espace».

fini $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour n quelconque donné. Dans ces cas, l'ensemble Φ_M peut être décrit respectivement comme l'ensemble C^ω de toutes les suites numériques $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ou comme l'ensemble C^n de tous les ensembles possibles de n nombres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, où l'addition et la multiplication par un nombre se font terme à terme. Les espaces C^k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \omega)$ sont dits espaces *numériques* ou *arithmétiques.*

Un exemple important d'espace vectoriel est aussi celui de l'ensemble Π de tous les polynômes $\mathcal{P}(t)$ d'une variable t et l'ensemble $\Pi^n \subset \Pi$ des polynômes de degré inférieur à un entier n, munis des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un nombre.

§ 1. Dépendance et indépendance linéaires. Rang d'une famille de vecteurs

Une *combinaison linéaire des vecteurs* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (non obligatoirement différents) de coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ est un vecteur u de la forme

$$u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k.$$

Une combinaison linéaire est dite *triviale* si tous ses coefficients sont nuls et *non triviale* dans le cas contraire. Une combinaison linéaire triviale de vecteurs arbitraires coïncide avec le vecteur zéro.

Des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont dits *linéairement indépendants* si toutes leurs combinaisons linéaires non triviales ne sont pas nulles et *linéairement dépendants* dans le cas contraire. On dit aussi que la famille de vecteurs $\{x_k\}_1^m$ forme une famille libre (respectivement non libre ou liée).

Une *famille de vecteurs* n'est autre qu'un ensemble non vide, fini, ordonné. On dit qu'une famille est une *sous-famille* d'une famille donnée si elle en est un sous-ensemble.

Nous allons commencer par des théorèmes élémentaires sur la dépendance et l'indépendance linéaires.

1. Pour qu'une famille formée d'un vecteur unique x soit libre, il faut et il suffit que $x \neq 0$.

2. Pour qu'une famille de vecteurs $\{x_k\}_1^m$ $(m > 1)$ soit libre, il faut et il suffit qu'aucun vecteur de la famille ne soit combinaison linéaire des autres vecteurs.

3. Chaque sous-famille d'une famille libre de vecteurs est libre.

En termes imagés, la dépendance linéaire est une propriété « héréditaire ».

Soit Γ une famille quelconque de vecteurs. L'*enveloppe linéaire* de la famille Γ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de la famille Γ. On note L (Γ) l'enveloppe linéaire de la famille Γ.

Une sous-famille Γ_0 d'une famille Γ est dite linéairement *complète* si $\Gamma \subset L(\Gamma_0)$, c'est-à-dire si chaque vecteur de la famille Γ est combinaison linéaire des vecteurs de Γ_0.

4. Chaque sous-famille d'une famille de vecteurs contenant une sous-famille linéairement complète est une sous-famille linéairement complète.

La complétude linéaire est aussi une propriété héréditaire, pour la relation d'extension d'une famille et non pour celle de restriction.

Comparons les théorèmes 3 et 4. Pour cela, énonçons le théorème 3 de la façon suivante.

« Chaque sous-famille d'une famille de vecteurs contenue dans une sous-famille libre est une sous-famille libre ».

Il est clair, maintenant, que si dans l'énoncé du théorème 3 on remplace le terme « sous-famille libre » par le terme « sous-famille linéairement complète » et le terme « qui est contenu » par le terme « qui contient », on obtient alors l'énoncé du théorème 4. Il y a entre les théorèmes 3 et 4 une symétrie logique ou comme on dit encore une *dualité*. Elle s'appuie sur la symétrie (dualité) correspondante des notions et des relations. La notion de dépendance linéaire est duale de la notion de complétude linéaire. La relation entre les ensembles M, L qui s'énonce par « M contient L » $(M \supset L)$ est duale de la relation « M est contenu dans L » $(M \subset L)$.

On rencontre souvent une dualité dans les différentes théories mathématiques. Par exemple, dans la théorie générale des ensembles, il existe une dualité qui s'appuie sur la dualité des relations « contenir » et « être contenu » dont il vient d'être question ci-dessus. Il s'avère que les notions d'*intersection* et de *réunion* sont duales, ce qui se manifeste constamment dans l'algèbre des ensembles. Les lois distributives en sont un exemple frappant:

$$(M \cup L) \cap N = (M \cap N) \cup (L \cap N),$$
$$(M \cap L) \cup N = (M \cup N) \cap (L \cup N).$$

Il est clair que la dualité de certaines notions ou relations peut être la conséquence de la dualité de certaines autres notions (relations). Par exemple, l'intersection d'ensembles peut être définie comme l'ensemble qui est contenu dans chacun des ensembles donnés et qui contient chaque ensemble possédant cette propriété. La réunion d'ensembles peut être définie « de façon duale » comme l'ensemble qui contient chacun des ensembles donnés et qui est contenu dans chaque ensemble admettant cette propriété. La dualité « contenir », « être contenu » est plus fondamentale que la dualité « intersection »-« réunion ».

Introduisons maintenant la définition suivante. On appelle sous-famille *de base* une sous-famille libre linéairement complète d'une famille de vecteurs non simultanément nuls. La notion de sous-famille de base est *autoduale*.

5. Pour qu'une sous-famille d'une famille de vecteurs soit une sous-famille de base, il faut et il suffit qu'elle soit libre et, de plus, maximale, c'est-à-dire qu'elle ne soit contenue dans aucune sous-famille libre distincte.

La proposition duale est la suivante:

6. Pour qu'une sous-famille d'une famille de vecteurs simultanément non tous nuls soit une base, il faut et il suffit qu'elle soit linéairement complète et, de plus, minimale, c'est-à-dire qu'elle ne contienne aucune sous-famille linéairement complète distincte.

Enonçons le théorème d'existence d'une sous-famille de base. Remarquons d'abord que toute famille Γ de vecteurs simultanément non tous nuls contient une sous-famille libre (par exemple, la sous-famille formée du vecteur unique $x \in \Gamma$, $x \neq 0$) et une sous-famille linéairement complète (par exemple, la sous-famille qui coïncide avec la famille Γ).

7. Toute famille de vecteurs simultanément non tous nuls contient une sous-famille de base. De plus, toute sous-famille libre peut être complétée jusqu'à une sous-famille de base et (de façon duale) de toute sous-famille linéairement complète on peut extraire une sous-famille de base.

Le rôle des sous-familles de base est mis en évidence par la proposition suivante:

8. Si $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_p}$ est une sous-famille de base de la famille de vecteurs $\{x_k\}_1^m$, alors tout vecteur x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ peut être représenté sous la forme d'une combinaison linéaire

$$x_j = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{kj} x_{r_k}$$

des vecteurs de la sous-famille et les coefficients α_{kj} de cette représentation sont déterminés de façon unique.

Inversement,

9. Si tout vecteur d'une famille est représenté de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire de vecteurs d'une sous-famille, alors cette sous-famille est une sous-famille de base.

La proposition suivante est un lemme essentiel pour le théorème fondamental **11**.

10. Soient $\Gamma = \{x_k\}_1^m$ $(m > 1)$ une famille quelconque de vecteurs et $\Gamma_1 = \{x_k\}_1^{m-1}$. Si les vecteurs u et v sont tels que $u, v \in \mathrm{L}(\Gamma)$, mais $v \overline{\in} \mathrm{L}(\Gamma_1)$, il existe alors un scalaire α de sorte que $u - \alpha v \in \mathrm{L}(\Gamma_1)$.

11. Tous $m + 1$ vecteurs de l'enveloppe linéaire d'une famille de vecteurs $\{x_k\}_1^m$ sont linéairement dépendants.

Un des corollaires importants du théorème **11** est que:

12. Toutes les sous-familles de base d'une famille Γ, fixée, de vecteurs contiennent le même nombre de vecteurs.

Ce nombre est appelé le *rang* de la famille Γ et est noté $\operatorname{rg}\Gamma$. Si dans Γ tous les vecteurs sont nuls, alors $\operatorname{rg}\Gamma = 0$.

Il est clair que le rang d'une famille n'est pas supérieur au nombre cardinal de cette famille.

Le rang d'une famille de vecteurs est la « mesure supérieure » de son indépendance linéaire:

13. Le rang d'une famille de vecteurs, simultanément non tous nuls, est égal au nombre cardinal maximal de ses sous-familles libres.

Donc, pour que la famille $\Gamma = \{x_k\}_1^m$ soit libre, il faut et il suffit que $\operatorname{rg}\Gamma = m$.

Le théorème dual de **13** est:

14. Le rang d'une famille de vecteurs, simultanément non tous nuls, est égal au nombre cardinal minimal de ses sous-familles linéairement complètes.

Ainsi, le rang d'une famille de vecteurs est « la mesure inférieure » de sa complétude linéaire.

Les théorèmes **13** et **14** caractérisent le rang d'une famille comme l'extrémum du nombre cardinal sur telle ou telle classe de sous-familles. Montrons que les sous-familles de base sont caractérisées comme des « points » où cet extrémum est atteint. Il est clair que cet extrémum est atteint en ces points. Inversement aussi:

15. Toute sous-famille libre d'une famille Γ de vecteurs formée de $\operatorname{rg}\Gamma$ vecteurs est une sous-famille de base, et (de façon duale) toute sous-famille linéairement complète d'une famille Γ de vecteurs formée de $\operatorname{rg}\Gamma$ vecteurs est une sous-famille de base.

Soient maintenant Γ_1 et Γ_2 deux familles quelconques de vecteurs. Nous écrirons $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ si $\Gamma_1 \subset L(\Gamma_2)$. Il est clair que si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, alors *a fortiori* $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$.

16. Pour que l'on ait $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, il faut et il suffit que $L(\Gamma_1) \subset \subset L(\Gamma_2)$.

La relation $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ est une relation de préordre sur l'ensemble des familles de vecteurs.

Nous dirons que des familles Γ_1 et Γ_2 sont *équivalentes* et l'on écrit $\Gamma_1 \backsim \Gamma_2$ si l'on a simultanément $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ et $\Gamma_2 \prec \Gamma_1$. Cette *relation d'équivalence* satisfait aux conditions usuelles.

On peut donc parler des *classes d'équivalence* de familles.

Il est clair que pour que l'on ait $\Gamma_1 \backsim \Gamma_2$, il faut et il suffit que $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2)$.

Etudions le comportement du rang comme fonctionnelle sur l'ensemble de toutes les familles de vecteurs.

17. Si $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, alors $\operatorname{rg}\Gamma_1 \leqslant \operatorname{rg}\Gamma_2$.

Ainsi, le rang est une fonctionnelle (*théorème de Steinitz*) monotone non décroissante (pour le préordre introduit).

Le rang peut être considéré comme une fonctionnelle sur l'ensemble des classes des familles équivalentes car, d'après le théorème de Steinitz, les familles équivalentes ont des rangs égaux. La réciproque n'est pas vraie, mais:

18. Si $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ et $\operatorname{rg} \Gamma_1 = \operatorname{rg} \Gamma_2$, alors $\Gamma_1 \backsim \Gamma_2$.

Ainsi, si $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, on a alors le signe d'égalité dans l'inégalité $\operatorname{rg} \Gamma_1 \leqslant \operatorname{rg} \Gamma_2$ si, et seulement si, $\Gamma_1 \backsim \Gamma_2$.

Donnons plusieurs inégalités qui se déduisent facilement des propriétés précédentes du rang.

19. Si l'intersection des familles de vecteurs $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ n'est pas vide (et, par suite, forme une famille), alors

$$\operatorname{rg} \left(\bigcap_{k=1}^{q} \Gamma_k \right) \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant q} (\operatorname{rg} \Gamma_k).$$

Ici, le signe d'égalité a lieu si, et seulement si, la famille $\bigcap_{k=1}^{q} \Gamma_k$ est équivalente au moins à l'une des familles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$.

20. Pour toute famille de vecteurs $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ on a l'inégalité

$$\operatorname{rg} \left(\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k \right) \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant q} (\operatorname{rg} \Gamma_k).$$

Ici, le signe d'égalité a lieu si, et seulement si, la famille $\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k$ est équivalente au moins à l'une des familles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$.

Les théorèmes **19** et **20** sont duaux.

Le théorème autodual suivant établit une relation entre les rangs de l'intersection et de la réunion de deux familles.

21. Si l'intersection de deux familles de vecteurs Γ_1 et Γ_2 n'est pas vide, alors

$$\operatorname{rg} (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) + \operatorname{rg} (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leqslant \operatorname{rg} \Gamma_1 + \operatorname{rg} \Gamma_2.$$

Cette inégalité reste également en vigueur dans le cas d'une intersection vide si l'on pose alors $\operatorname{rg} (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0$. Donc, en général

22. $\operatorname{rg} (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leqslant \operatorname{rg} \Gamma_1 + \operatorname{rg} \Gamma_2$.

De plus,

23. Si $L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\}$, alors

$$\operatorname{rg} (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \operatorname{rg} \Gamma_1 + \operatorname{rg} \Gamma_2.$$

Ainsi, le rang est une fonctionnelle *additive* (par rapport à l'opération de réunion des familles de vecteurs).

La réciproque du théorème **23** est:

24. Si $\operatorname{rg} (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \operatorname{rg} \Gamma_1 + \operatorname{rg} \Gamma_2$, alors

$$L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\}.$$

Deux familles de vecteurs Γ_1 et Γ_2 qui vérifient la condition

$$L(\Gamma_1) \cap L(\Gamma_2) = \{0\}$$

sont dites (*réciproquement*) *libres.*

Pour terminer ce paragraphe, caractérisons le rang en énumérant ses propriétés fonctionnelles que nous connaissons déjà d'après ce qui précède.

25. **Supposons que sur l'ensemble de toutes les familles de vecteurs soit donnée une fonctionnelle $\rho(\Gamma)$ vérifiant les propriétés suivantes:**

1) si $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, alors $\rho(\Gamma_1) = \rho(\Gamma_2)$;

2) si les familles Γ_1 et Γ_2 sont (réciproquement) libres, alors $\rho(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \rho(\Gamma_1) + \rho(\Gamma_2)$;

3) si la famille Γ est formée d'un vecteur unique $x \neq 0$, alors $\rho(\Gamma) = 1$.

Alors, $\rho(\Gamma) = \operatorname{rg} \Gamma$ pour tous les Γ.

Il faut remarquer qu'aucun couple des trois conditions 1), 2), 3) n'est suffisant pour caractériser le rang.

§ 2. Bases et dimension des espaces. Espaces isomorphes

On dit qu'un ensemble non vide F des vecteurs de l'espace E est *linéairement minimal* si chaque famille $\Gamma \subset F$ est libre.

Un ensemble F est appelé ensemble *de générateurs* si pour chaque $x \in E$, il existe une famille $\Gamma \subset F$ telle que $x \in L(\Gamma)$.

Un espace E est dit *de dimension finie* s'il satisfait à l'une des conditions duales suivantes:

1) chaque ensemble linéairement minimal de E est fini;

2) il existe dans E un ensemble fini de générateurs.

On peut facilement établir à l'aide de 11 que:

26. **Les conditions 1) et 2) sont équivalentes.**

Si un espace n'est pas de dimension finie, il est alors dit *de dimension infinie*. Donnons plusieurs exemples.

27. **L'espace Φ_M de toutes les fonctionnelles sur un ensemble M est de dimension finie si l'ensemble M est fini et de dimension infinie dans le cas contraire. En particulier, l'espace numérique C^n, pour tout n naturel, est de dimension finie, tandis que l'espace C^ω est de dimension infinie.**

De façon analogue

28. **L'ensemble Π^n des polynômes de degré inférieur à n (n étant un nombre naturel) est de dimension finie tandis que l'espace Π de tous les polynômes est de dimension infinie.**

Dans ce qui suit, seuls les espaces de dimension finie seront considérés.

Si un ensemble E est de dimension finie, il existe alors une famille de vecteurs Γ telle que $L(\Gamma) = E$. La famille de vecteurs possédant cette propriété est dite *complète.*

Une famille libre linéairement complète de vecteurs est appelée *base* de l'espace E.

29. Dans l'espace C^n, les éléments

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

forment une base.

Cette base est dite *canonique*.

30. Dans l'espace Π^n les polynômes $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ forment une base.

Cette base est dite aussi *canonique*.

Les bases admettent une caractéristique analogue à celle des sous-familles de base des familles de vecteurs (cf. **5** et **6**)

31. Pour qu'une famille de vecteurs soit une base, il faut et il suffit qu'elle soit une famille libre et, de plus, maximale, c'est-à-dire qu'elle ne soit contenue dans aucune famille libre, distincte d'elle.

32. Pour qu'une famille de vecteurs soit une base, il faut et il suffit qu'elle soit linéairement complète et, de plus, minimale, c'est-à-dire qu'elle ne contienne aucune famille linéairement complète distincte de cette dernière.

Le théorème d'existence d'une base est analogue au théorème **7**:

33. Chaque espace $E \neq 0$ admet une base. De plus, toute famille libre de vecteurs peut être complétée de façon à former une base et (de façon duale) on peut extraire une base de toute famille linéairement complète de vecteurs.

Une base quelconque dans un espace tient le rôle de système de coordonnées (comparer à **8** et **9**):

34. Soit $\{e_k\}_1^n$ une base. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une *décomposition unique suivant la base*:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

Les coefficients $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de cette décomposition sont appelés les *composantes* ou les *coordonnées* du vecteur x par rapport à la base $\{e_k\}_1^n$.

35. Si une famille de vecteurs $\{e_k\}_1^n$ est telle que pour tout vecteur x il existe une décomposition unique $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, alors cette famille est une base.

En s'appuyant sur le théorème **34**, introduisons la notion de matrice d'une famille de vecteurs. De façon générale, une *matrice* (à n lignes et à m colonnes ou matrice $n \times m$) est un tableau rectan-