Chapitre 1

Introduction

La construction du corps des nombres réels à partir des premiers principes de la théorie des ensembles ne fait pas partie du cours. Toutefois, passer en revue les diverses étapes menant aux nombres réels est une bonne introduction à la théorie qui suit.

On peut penser que les entiers naturels, que nous dénotons de nos jours par $1, 2, 3, \ldots$ sont apparus à propos de questions de dénombrement, l'opération d'addition $m + n$ de deux tels nombres correspondant à la réunion d'ensembles disjoints et leur multiplication mn étant tout simplement une addition abrégée :

$$mn = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m}.$$

Une relation d'ordre naturelle $m < n$ existe entre ces entiers, correspondant à l'inclusion des ensembles qu'ils dénombrent. Les besoins du commerce amenèrent ensuite l'introduction des nombres entiers négatifs $-n$ puis celle des fractions m/n et enfin celle du nombre 0, la relation d'ordre étant prolongée de façon assez directe à ces nouveaux nombres. À cette étape, l'on disposait d'un système numérique fermé sous les quatre opérations de l'arithmétique — addition, soustraction, multiplication et division. Le développement de la géométrie fit apparaître des nombres irrationnels (certaines longueurs ne pouvaient pas être mesurées par des nombres pouvant se mettre sous la forme m/n) et les Grecs surent relever le défi posé par ces derniers en construisant rigoureusement un système de nombres les englobant, système que nous appelons aujourd'hui le corps des nombres réels et que nous dénotons par $\mathbb{R}$.

Quant au calcul infinitésimal, il est né au XVII$^{\text{e}}$ siècle, sous la plume de Leibniz (1684 - *Acta Eruditorum*) et de Newton (1687 - *Principia Mathematica*) — indépendamment l'un de l'autre et à la suite de nombreux précurseurs.

Ce calcul s'est développé tout au long du XVIII^{e} siècle grâce aux travaux de mathématiciens tels les Bernoulli, Euler et Lagrange. Et c'est au XIX^{e} siècle qu'il fût assis sur des bases solides suite en particulier aux efforts de Cauchy et de Weierstrass.

Chapitre 2

Quatorze axiomes

Nous supposons donné un ensemble $\mathbb{R}$ sur lequel sont définies des opérations d'addition $x, y \mapsto x + y$ et de multiplication $x, y \mapsto x \cdot y = xy$ et une relation d'ordre $x > y$ obéissant aux quatorze axiomes suivants.

2.1 Les axiomes de l'arithmétique

Toutes les règles de l'arithmétique découlent des neuf premiers axiomes.

A1 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,*

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

A2 *Quels que soient x et $y \in \mathbb{R}$,*

$$x + y = y + x;$$

A3 *Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$x + 0 = x;$$

A4 *À chaque $x \in \mathbb{R}$ correspond un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que*

$$x + (-x) = 0.$$

L'associativité (axiome **A1**) et la commutativité (axiome **A2**) de l'addition font que l'on peut écrire sans équivoque la somme de trois nombres x, y et z

sous la forme $x+y+z$ et permettent l'utilisation de la notation Σ pour désigner une somme comportant n termes :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

L'élément neutre pour l'addition (axiome **A3**) est unique car si $0'$ avait la même propriété que 0, on aurait

$$0' = 0' + 0 = 0.$$

De même, l'inverse additif d'un nombre (axiome **A4**) est uniquement défini car si $-x'$ avait la même propriété que $-x$, on aurait

$$-x' = (-x') + 0 = (-x') + x + (-x) = 0 + (-x) = -x.$$

Observons que

$$-0 = (-0) + 0 = 0.$$

Soustraire y de x, c'est additionner $-y$ à x et l'on écrit

$$x + (-y) = x - y.$$

A5 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,*

$$x(yz) = (xy)z;$$

A6 *Quels que soient x et $y \in \mathbb{R}$,*

$$xy = yx;$$

A7 *Il existe un élément $1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$x1 = x;$$

A8 *À chaque $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ correspond un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que*

$$xx^{-1} = 1.$$

L'associativité (axiome **A5**) et la commutativité (axiome **A6**) de la multiplication font que l'on peut écrire sans équivoque le produit de trois nombres x, y et z sous la forme xyz et permettent l'utilisation de la notation Π pour désigner un produit comportant n termes :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

L'élément neutre pour la multiplication (axiome **A7**) est unique car si $1'$ avait la même propriété que 1, on aurait

$$1' = 1'1 = 1.$$

De même, l'inverse multiplicatif d'un nombre non nul (axiome **A8**) est uniquement défini car si $(x^{-1})'$ avait la même propriété que x^{-1}, on aurait

$$(x^{-1})' = (x^{-1})'1 = (x^{-1})'xx^{-1} = 1x^{-1} = x^{-1}.$$

Observons que

$$1^{-1} = 1^{-1}1 = 1.$$

Diviser x par $y \neq 0$, c'est multiplier x par y^{-1} et l'on écrit aussi

$$y^{-1} = \frac{1}{y}$$

pour désigner l'inverse multiplicatif.

Les opérations d'addition et de multiplication sont reliées par l'axiome de distributivité :

A9 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,*

$$x(y+z) = xy + xz.$$

La première conséquence de cet axiome est que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$0x = 0.$$

En effet,

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x$$

et le résultat suit en soustrayant $0x$ de chaque membre de l'équation. En conséquence, 0 n'a pas d'inverse multiplicatif : si 0^{-1} existait, on aurait en effet

$$1 = 00^{-1} = 0$$

ce qui est exclu. De plus, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$-x = (-1)x.$$

En effet,

$$(-1)x + x = (-1 + 1)x = 0x = 0$$

et le résultat découle de l'unicité de l'inverse additif. Finalement, la règle d'addition des fractions est aussi une conséquence de la distributivité de la multiplication sur l'addition (axiome **A9**) : si $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}$$

(exercice 2).

2.2 La relation d'ordre

La relation d'ordre $x > y$ (lire : x strictement plus grand que y) est, par définition, équivalente à $y < x$ (lire : y strictement plus petit que x) et les axiomes la gouvernant pourraient aussi être énoncés (sous une forme modifiée) à l'aide de $x \geq y$ (lire : x plus grand que y) qui est, par définition, une abréviation pour $x > y$ ou $x = y$ ou à l'aide de $y \leq x$ (lire : y plus petit que x), abréviation pour $y < x$ ou $y = x$.

A10 *Quels que soient x et $y \in \mathbb{R}$, une et une seule des trois possibilités suivantes est réalisée : $x > y$, $x = y$, $x < y$.*

A11 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$, $x > y$ et $y > z$ entraînent $x > z$.*

A12 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$, $x > y$ entraîne $x + z > y + z$.*

A13 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$, $x > y$ et $z > 0$ entraînent $xz > yz$.*

Les propriétés usuelles des inégalités découlent toutes de ces quatre axiomes.

- *$x > y$ est équivalent à $x - y > 0$.*

Conséquence directe de l'axiome **A12**.

- *$x > y$ et $z < 0$ impliquent $xz < yz$.*

En effet, $0 > z$ et $x - y > 0$ impliquent $0(x - y) > z(x - y)$ (axiome **A13**), c'est-à-dire $0 > xz - yz$ puis $yz > xz$.

- *$x > y$ et $a \geq b$ impliquent $x + a > y + b$.*

En effet, $x+a > y+a$ et $a+y \geq b+y$ impliquent, par transitivité (axiome **A11**), $x+a > b+y$.

- *$x > y > 0$ et $a \geq b > 0$ impliquent $ax > by$.*

En effet, $ax > ay$ et $ay \geq by$ impliquent $ax > by$.

- $1 > 0$.

En effet, $1 \neq 0$. Si l'on avait $1 < 0$, on aurait aussi $1 \cdot 1 > 1 \cdot 0$, c'est-à-dire $1 > 0$ ce qui est absurde. Par trichotomie (axiome **A10**), $1 > 0$.

- *$x > 0$ implique $-x < 0$ et $x^{-1} > 0$.*

En effet, $-1 < 0$ puisque $-1 \neq 0$ et que $-1 > 0$ entraînerait $0 = -1+1 > 1$. Donc $-x = -1 \cdot x < 0$. De même, $x^{-1} < 0$ entraînerait $1 = x^{-1}x < 0$.

- *$x > 1$ implique $x^{-1} < 1$.*

En effet, $x^{-1} \neq 1$ et les inégalités $x > 1$ et $x^{-1} > 1$ entraîneraient $1 > 1$.

En notation décimale, par définition, $2 = 1+1, 3 = 2+1, 4 = 3+1, 5 = 4+1, 6 = 5+1, 7 = 6+1, 8 = 7+1, 9 = 8+1, 10 = 9+1, 11 = 10+1, \ldots$ Des relations telles que $2+2 = 4$ et $6 = 3 \cdot 2$ sont des théorèmes (faciles à démontrer : par exemple, $4 = 3+1 = 2+1+1 = 2+2$) que nous prendrons pour acquis.

L'ensemble des **entiers naturels**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

est fermé sous l'addition et la multiplication, (nous utiliserons la notation

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

pour les **entiers positifs**), l'ensemble des **entiers relatifs**

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

l'est aussi sous la soustraction et l'ensemble

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

des **nombres rationnels** satisfait tous les axiomes précédents, comme il est facile de le vérifier.

Si $x \neq 0$ et si $n \in \mathbb{N}$, nous posons

$$x^n = \underbrace{xx\cdots x}_{n}, \quad x^0 = 1, \quad x^{-n} = \underbrace{x^{-1}x^{-1}\cdots x^{-1}}_{n}.$$

Évidemment, $0^n = 0$ mais 0^0 *n'est pas défini.* Il est alors aisé de vérifier que les règles des exposants sont satisfaites :

quels que soient $x \neq 0, y \neq 0$ *et quels que soient* $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$(xy)^m = x^m y^m, \quad x^{m+n} = x^m x^n, \quad x^{mn} = (x^m)^n.$$

Vérifions, par exemple, la première. Si $m > 0$,

$$(xy)^m = \underbrace{xyxy\cdots xy}_{m} = \underbrace{xx\cdots x}_{m}\underbrace{yy\cdots y}_{m} = x^m y^m;$$

ensuite,

$$(xy)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 y^0;$$

enfin, si $m = -n < 0$,

$$(xy)^{-n} = \underbrace{(xy)^{-1}(xy)^{-1}\cdots(xy)^{-1}}_{n} = \underbrace{x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}\cdots x^{-1}y^{-1}}_{n} = x^{-n}y^{-n}.$$

$x > 0$ se lit x est strictement positif, $x \geq 0$ se lit x est positif, $x < 0$ se lit x est strictement négatif et $x \leq 0$ se lit x est négatif. Tous les carrés sont positifs :

- $x \neq 0$ *implique* $x^2 > 0$.

En effet, on a à la fois $x^2 = xx$ et $x^2 = (-x)(-x)$.

Les nombres réels admettent pour représentation géométrique les points d'une droite horizontale, le point correspondant au nombre x étant à la droite du point correspondant au nombre y si et seulement si $x > y$.

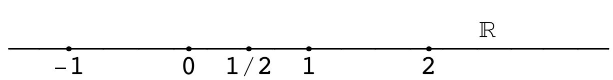

FIGURE 2.1 – La droite réelle