Chapitre 1

Nombres réels et suites numériques

1.1 Exercices

Exercice 1. *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *une application croissante. On se propose de montrer que* f *possède un point fixe*[1]*, pour cela on pose*

$$A = \{x \in [0,1] \ : \ f(x) \leq x\}.$$

1. *Montrer que* A *possède une borne inférieure. On note* $a = \inf A$.
2. *Montrer que* $f(A) \subset A$.
3. *Montrer que* $a \in A$.
4. *En déduire que* $f(a) = a$.

Solution :

1. L'ensemble A est non vide, puisque $1 \in A$. De plus comme A est minoré par 0 alors A possède une borne inférieure.
2. Soit $y \in f(A)$. Alors $y \in [0,1]$ et il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Donc

   $$y = f(x) \leq x.$$

   Mais, comme f est croissante alors

   $$f(y) \leq f(x) = y.$$

   Par suite $y \in A$, et donc $f(A) \subset A$.

1. On appelle point fixe de f tout réel x vérifiant $f(x) = x$.

3. On sait que, pour tout $x \in A$,
$$a = \inf A \leq x \leq 1.$$
Donc $a \leq 1$. De plus, comme 0 est un minorant de A, alors $0 \leq a$, car a est le plus grand des minorants de A. Par suite $a \in [0, 1]$.
D'autre part, comme pour tout $x \in A$,
$$a \leq x,$$
alors
$$f(a) \leq f(x) \leq x,$$
puisque f est croissante et $x \in A$. Par suite $f(a)$ minore A, et donc
$$f(a) \leq a. \tag{1.1.1}$$
Par conséquent $a \in A$.
4. D'après la question précédente, on a : $a \in A$, et donc la question 2. implique que $f(a) \in A$. Par conséquent, puisque
$$a = \inf A,$$
on en déduit que
$$a \leq f(a), \tag{1.1.2}$$
D'où avec (1.1.1) et (1.1.2) on obtient $f(a) = a$.

□

Exercice 2.

1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
   (a) *On suppose que A est majorée par β et qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq p}$ d'éléments de A qui converge vers β. Montrer que $\beta = \sup A$.*
   (b) *On suppose que A est minorée par α et qu'il existe une suite $(a_n)_{n \geq q}$ d'éléments de A qui converge vers α. Montrer que $\alpha = \inf A$.*
2. *Justifier l'existence puis déterminer la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants :*
   (a) $U = \left\{ u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$
   (b) $V = \left\{ v_n = \dfrac{2n+1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$
   (c) $W = \left\{ w_{n,m} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N}^* \right\}.$

Solution :

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
   (a) Comme A est majorée par β, alors $\beta \geq \sup A$, puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants de A. De plus, puisque pour tout $n \geq p$, $b_n \in A$, alors
   $$\forall n \geq p, \qquad b_n \leq \sup A,$$
   et donc, par passage à la limite on obtient
   $$\beta \leq \sup A.$$
   Ainsi
   $$\beta = \sup A.$$
   (b) Comme A est minorée par α, alors $\alpha \leq \inf A$, puisque $\inf A$ est le plus grand des minorants de A. De plus, puisque pour tout $n \geq q$, $a_n \in A$, alors
   $$\forall n \geq q, \qquad a_n \geq \inf A,$$
   et donc, par passage à la limite on obtient $\alpha \geq \inf A$. Ainsi
   $$\alpha = \inf A.$$

2. (a) Il est clair que l'ensemble U est non vide puisqu'il contient $0 = u_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}.$$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$1 < u_{2n} \leq \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad -1 < u_{2n-1} \leq 0.$$
   Par suite, l'ensemble U est borné, puisque,
   $$n \in \mathbb{N}^*, \qquad -1 < u_n \leq \frac{3}{2}.$$
   Donc, $\sup U$ et $\inf U$ existent dans $\mathbb{R}$ et de plus
   $$-1 \leq \inf U \leq \sup U \leq \frac{3}{2}.$$
   Or $\frac{3}{2} = u_2 \in U$, alors
   $$\sup U = \max U = \frac{3}{2}.$$

Enfin, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$a_n = u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}.$$

Comme la suite (a_n) est à valeurs dans U et converge vers le minorant -1, alors d'après la question 1. (b) on en déduit que

$$\inf U = -1.$$

Cette borne inférieure n'est pas un minimum, puisque $-1 \notin U$.

(b) Comme $1 = v_0 \in V$, alors V est non vide. De plus la partie V est bornée puisque,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < v_n = 2 - \frac{1}{n+1} < 2,$$

et donc $\sup V$ et $\inf V$ existent.
Maintenant, comme la suite (v_n) d'éléments de V converge vers le majorant 2, alors d'après la question 1. (a), on obtient $\sup V = 2$, et cette borne supérieure n'est pas un maximum, puisque $2 \notin V$.
D'autre part, comme (v_n) est une suite croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \geq v_0 = 1,$$

ainsi

$$\inf V = \min V = 1.$$

(c) L'ensemble W est non vide, puisqu'il contient $2 = w_{1,1}$ et il est bornée, puisque

$$\forall n,\, m \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < w_{n,m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2,$$

ce qui justifie l'existence de $\sup W$ et $\inf W$.
Il est clair que $\sup W = \max W = 2$, puisque $2 = w_{1,1} \in W$. De plus la suite (c_n) d'éléments de W définie par

$$\forall n, \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = w_{n,n} = \frac{2}{n}$$

converge vers le minorant 0, et donc la question 1. (b) donne

$$\inf W = 0.$$

$\square$

Exercice 3. *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées.*

1. *Montrer que, si $A \subset B$, alors*
$$\sup A \leq \sup B \quad \text{et} \quad \inf B \leq \inf A.$$

2. *Montrer que la partie $A \cup B$ est bornée et que*
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B), \quad \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

3. *On pose $A + B = \{a + b \ : \ a \in A,\, b \in B\}$. Montrer que,*
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

4. *On considère*
$$E = \left\{ e_n = \frac{n(-1)^n + 1}{2n + (-1)^n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   (a) *Vérifier que,*
$$E = \left\{ \frac{2n+1}{4n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{-2n}{4n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   (b) *Justifier l'existence de* $\sup E$ *et* $\inf E$*.*
   (c) *Déterminer* $\sup E$ *et* $\inf E$*.*

Solution :

1. Les parties A et B sont non vides et bornées, alors $\sup A$, $\sup B$ et $\inf A$, $\inf B$ existent. De plus on a :
$$\forall b \in B, \quad \inf B \leq b \leq \sup B,$$
et comme $A \subset B$, alors
$$\forall a \in A, \quad \inf B \leq a \leq \sup B.$$
Par conséquent, $\sup B$ est un majorant de A et $\inf B$ est un minorant de A, et comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A et $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, alors
$$\sup A \leq \sup B \quad \text{et} \quad \inf B \leq \inf A.$$

2. La partie A est majorée par $\sup A$ et B par $\sup B$, donc $A \cup B$ est majorée par $\max(\sup A, \sup B)$, donc $\sup(A \cup B)$ existe, avec
$$\sup(A \cap B) \leq \max(\sup A, \sup B).$$
Inversement, $A \cup B$ est majorée par $\sup(A \cup B)$, alors A et B sont aussi majorées par $\sup(A \cup B)$, puisque sont incluses dans $A \cup B$, en particulier
$$\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B).$$
D'où
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$
Le même raisonnement est valable, pour montrer que $\inf(A \cup B)$ existe et que
$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

3. Comme A et B sont non vides, alors $A + B$ est non vide. De plus, pour tout $(a, b) \in A \times B$, on a :
$$a + b \leq \sup A + \sup B,$$
par suite la partie $A + B$ est majorée et non vide. Donc $\sup(A + B)$ existe. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in A \times B$ tel que
$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varepsilon \leq \sup A \quad \text{et} \quad \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b_\varepsilon \leq \sup B,$$
et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in A \times B$
$$\sup A + \sup B - \varepsilon < a_\varepsilon + b_\varepsilon \leq \sup A + \sup B.$$
Par conséquent, d'après la caractérisation de la borne supérieure on en déduit que
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

4. On considère
$$E = \left\{ e_n = \frac{n(-1)^n + 1}{2n + (-1)^n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   (a) On pose
   $$A = \left\{ a_n = e_{2n} = \frac{2n+1}{4n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$
   et
   $$B = \left\{ b_n = e_{2n+1} = \frac{-2n}{4n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   Alors
   $$E = A \cup B = \left\{ \frac{2n+1}{4n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{-2n}{4n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(b) Comme $1 = a_1 \in A$ et $0 = b_0 \in B$, alors A et B sont non vides, et donc $E = A \cup B$ est non vide. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leq 1 \quad \text{ et } \quad |b_n| \leq 1,$$

alors les parties A et B sont bornées, et donc $E = A \cup B$ est bornée. Par suite les valeurs $\sup E$ et $\inf E$ existent.

(c) Il est clair que la partie A est majorée par 1, alors que la partie B est majorée par 0, et comme $1 \in A$ et $0 \in B$, on en déduit que

$$1 = \max A = \sup A \quad \text{ et } \quad 0 = \max B = \sup B.$$

Ainsi la question 2. donne

$$\sup E = \sup(A \cup B) = \max(1; 0) = 1.$$

D'autre part on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{2n+1}{4n+1} = \frac{1}{2}\frac{(4n+1)+1}{4n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8n+2}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{-2n}{4n+1} = -\frac{1}{2}\frac{(4n+1)-1}{4n+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8n+2},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \geq \frac{1}{2} \quad \text{ et } \quad b_n \geq -\frac{1}{2},$$

ce qui implique que, les parties A et B sont minorées respectivement par $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Enfin comme la suite (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$ et la suite (b_n) converge vers $-\frac{1}{2}$, alors d'après l'exercice 2 (question 1. (b)), on en déduit que

$$\inf A = \frac{1}{2} \quad \text{ et } \quad \inf B = -\frac{1}{2}.$$

D'où la question 2. donne

$$\inf E = \inf(A \cup B) = \min\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

□

Exercice 4. *On se propose maintenant de déterminer les bornes inférieure et supérieure de la partie*

$$A = \left\{ u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$2^{2n+4} \geq 3(2n+1)(2n+3).$$

2. *Montrer que* A *est bornée.*
3. *On pose*

$$A_1 = \{u_{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \quad et \quad A_2 = \{u_{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

   (a) *Montrer que*

$$\inf A_1 \leq \sup A_1 \leq 0 \leq \inf A_2 \leq \sup A_2.$$

   (b) *En déduire* $\sup A$.

4. (a) *Vérifier que la suite* $(u_{2n+1})_n$ *est croissante.*
   (b) *En déduire* $\inf A$.

Solution :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
   — Pour $n = 0$, le résultat est vrai, puisque $2^4 = 16 \geq 9$.
   — Supposons que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors

$$\begin{array}{rcl} 2^{2(n+1)+4} & = & 4 \times 2^{2n+4} \\ & \geq & 12(2n+1)(2n+3) \\ & \geq & 3(2(n+1)+1)(2(n+1)+3); \end{array}$$

   donc le résultat est aussi vrai pour $n+1$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2^{2n+4} \geq 3(2n+1)(2n+3).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

   donc A est borné.

3. (a) Il est clair que les élèments de A_1 sont négatifs, alors que ceux de A_2 sont positifs, d'où

$$\inf A_1 \leq \sup A_1 \leq 0 \leq \inf A_2 \leq \sup A_2.$$