Chapitre 1

Les fonctions

1.1 Le résumé du cours

Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I contenant les réels a et b. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c appartenant à I tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, f prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c appartenant à $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Cas particulier : Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur $[a; b]$.

Si $f(a) f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

La dérivation

$f(x)$	k	x	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	e^x
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	e^x

Fonctions	$u+v$	$ku \quad (k \in \mathbb{R})$	uv	$\frac{1}{u}$	e^u	$\frac{u}{v}$
Dérivées	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u'e^u$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

La tangente

Si f est dérivable en a alors $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Une **équation de la tangente** au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I.

– Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle I.

– Si, pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

– Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur l'intervalle I.

Remarque : Si la dérivée f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en quelques points où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.

Les extrema

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 un réel de I.

Si f admet un **extremum local** en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Nous avons donc une condition **nécessaire** pour l'obtention d'un extremum sur un intervalle ouvert mais cette condition n'est pas suffisante.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 un réel de I. Si f' **s'annule** en x_0 **en changeant de signe** alors f admet en x_0 un extremum local.

La convexité

$\star$ Une fonction est **convexe** sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

$\star$ Une fonction est **concave** sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique est située entièrement en dessous de chacune de ses tangentes.

$\star$ Une fonction f est **convexe** sur un intervalle I si, et seulement si, sa fonction dérivée seconde f'' est **positive** sur I.

$\star$ Une fonction f est **concave** sur un intervalle I si, et seulement si, sa fonction dérivée seconde f'' est **négative** sur I.

$\star$ La représentation graphique de la fonction f admet un **point d'inflexion** si elle traverse sa tangente en ce point.

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

$$e^x e^y = e^{x+y} \qquad \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} \qquad (e^x)^n = e^{xn}\,(n \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right.$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

La dérivée

$\star$ La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp)' = \exp$.

$\star$ Si u est dérivable sur I alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$.

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln(x^n) = n \ \ln(x) \ (n \in \mathbb{Z}) \qquad \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln(x)$$

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \qquad \ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$$

La dérivée

⋆ Pour tout x strictement positif, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

1.2 Les exercices

1.2.1 Amérique du Nord 2016

Thèmes et compétences abordés :

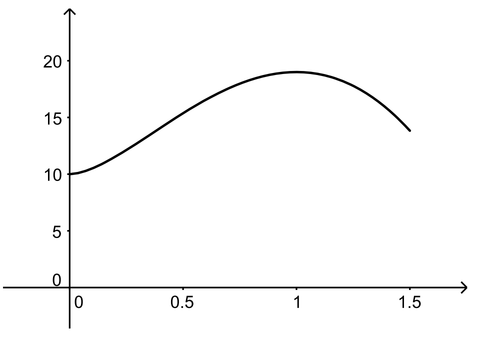
Étude d'une fonction. Dérivée seconde. Point d'inflexion. Définition de la primitive d'une fonction. Calcul d'une intégrale. Valeur moyenne d'une fonction. Application économique.

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;1.5]$ par :

$$f(x) = 9x^2\left[1 - 2\ln(x)\right] + 10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1. Montrer que $f'(x) = -36x\ln(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;1.5]$.

(a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;1.5]$.

(b) Déduire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;1.5]$.

2. On admet que $f''(x) = -36\ln(x) - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0;1.5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1.5]$ par :

$$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln(x).$$

(a) Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0; 1.5]$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_1^{1,5} f(x)\mathrm{d}x$. On donnera le résultat arrondi au centième.

Partie B : Application économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une société est cotée en bourse depuis un an et demi.

Le prix de l'action depuis un an et demi est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'introduction en bourse et $f(x)$ représente le prix de l'action, exprimé en euros.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1 :

« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur ».

Proposition 2 :

« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 € ».

1.2.2 Centres étrangers 2016

Thèmes et compétences abordés :

Étude de la concavité d'une fonction. Utilisation d'un logiciel de calcul formel. Coefficient directeur d'une tangente. Lectures graphiques.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{0.4}{20e^{-x}+1} + 0.4.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f'(x) := 8 * e\hat{}(-x)/(20 * e\hat{}(-x)+1)^2$ $\to f'(x) : \dfrac{8 \cdot e^{-x}}{400\left(e^{-x}\right)^2 + 40e^{-x} + 1}$
2	$g(x) :=$ Dérivée $[f'(x)]$ $\to g(x) := \dfrac{160\left(e^{-x}\right)^2 - 8e^{-x}}{8000\left(e^{-x}\right)^3 + 1200\left(e^{-x}\right)^2 + 60e^{-x} + 1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $\to 8e^{-x} \cdot \dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}$

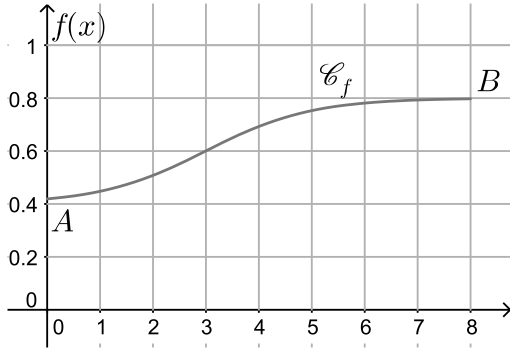
En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Partie B

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f, définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier.

La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point M est appelé « pente en M ».

On précise aussi qu'une pente en M de $5\,\%$ correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M égal à 0.05.

Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathscr{C}_f$ la pente ne dépasse $12\,\%$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1

L'altitude du village B est 0.6 km.

Proposition 2

L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

Proposition 3

La pente en A vaut environ $1.8\,\%$.

Proposition 4

Le projet de route ne sera pas accepté.