

# Table des matières

<b>1</b>	<b>GROUPES</b>	<b>21</b>
1.1	Généralités . . . . .	21
1.2	Morphisme de groupes . . . . .	25
1.2.1	Définition . . . . .	25
1.2.2	Propriétés . . . . .	25
1.2.3	Isomorphisme de groupes . . . . .	26
1.3	Sous-groupes . . . . .	27
1.3.1	Définitions . . . . .	27
1.3.2	Sous-groupes de $\mathbf{Z}$ . . . . .	28
1.3.3	Morphismes et sous-groupes . . . . .	29
1.3.4	Ordre d'un élément d'un groupe . . . . .	30
1.3.5	Système générateur d'un groupe . . . . .	31
1.4	Théorème d'isomorphisme . . . . .	32
1.5	Groupes cycliques . . . . .	35
1.5.1	Groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . . . . .	35
1.5.2	Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . . . . .	37
1.5.3	Sous-groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . . . . .	39
1.5.4	Groupes monogènes . . . . .	40
1.5.5	Groupes $(\mathbf{U}_n, \times)$ . . . . .	42
1.6	Groupes symétriques . . . . .	43
1.7	Sous-groupes distingués . . . . .	45
1.8	Systèmes générateurs de $S_n$ et de $A_n$ . . . . .	51
1.8.1	Systèmes générateurs de $S_n$ . . . . .	51
1.8.2	Signature d'une permutation . . . . .	52
1.8.3	Systèmes générateurs de $A_n$ . . . . .	54

1.9	Groupe opérant sur un ensemble . . . . .	56
1.10	Exercices . . . . .	60
1.11	Solutions des exercices . . . . .	70
<b>2</b>	<b>APPLICATIONS LINÉAIRES USUELLES</b>	<b>83</b>
2.1	Groupe linéaire et groupe spécial linéaire . . . . .	83
2.2	Formes linéaires . . . . .	87
2.3	Homothéties vectorielles . . . . .	88
2.4	Projections vectorielles . . . . .	90
2.5	Symétries vectorielles . . . . .	94
2.6	Affinités et dilatations vectorielles . . . . .	98
	2.6.1 Affinités vectorielles . . . . .	98
	2.6.2 Dilatations vectorielles . . . . .	99
2.7	Transvections vectorielles . . . . .	100
2.8	Exercices . . . . .	105
2.9	Solutions des exercices . . . . .	111
<b>3</b>	<b>ESPACES EUCLIDIENS</b>	<b>121</b>
3.1	Généralités . . . . .	121
	3.1.1 Définitions . . . . .	121
	3.1.2 Propriétés . . . . .	123
	3.1.3 Orthogonalité . . . . .	125
3.2	Applications orthogonales . . . . .	129
	3.2.1 Définition d'une application orthogonale . . . . .	129
	3.2.2 Isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens . . . . .	131
	3.2.3 Matrices orthogonales . . . . .	132
3.3	Orientation . . . . .	133
3.4	Produit vectoriel : approche algébrique . . . . .	135
	3.4.1 Définition du produit vectoriel . . . . .	135
	3.4.2 Propriétés du produit vectoriel . . . . .	137
	3.4.3 Vecteur normal à un hyperplan . . . . .	141
3.5	Projections et symétries orthogonales . . . . .	142
	3.5.1 Projection vectorielle orthogonale . . . . .	142
	3.5.2 Symétrie orthogonale vectorielle . . . . .	144
3.6	Exercices . . . . .	145
3.7	Solutions des exercices . . . . .	150

<b>4</b>	<b>ESPACES AFFINES</b>	<b>163</b>
4.1	Généralités sur les espaces affines . . . . .	163
4.1.1	Définition . . . . .	163
4.1.2	Repères . . . . .	166
4.1.3	Unicité . . . . .	166
4.2	Variétés linéaires affines . . . . .	167
4.2.1	Définition . . . . .	167
4.2.2	Propriétés . . . . .	167
4.2.3	Parallélisme . . . . .	169
4.2.4	Cas particuliers . . . . .	171
4.2.5	Équations paramétriques d'une variété affine . . . . .	171
4.2.6	Équations cartésiennes d'une variété affine . . . . .	172
4.2.7	Équation cartésienne d'un hyperplan . . . . .	175
4.3	Variétés linéaires affines et barycentre . . . . .	179
4.3.1	Définition du barycentre . . . . .	179
4.3.2	Propriétés . . . . .	181
4.3.3	Repère affine . . . . .	182
4.4	Espaces affines euclidiens . . . . .	184
4.4.1	Définition . . . . .	184
4.4.2	Isomorphisme entre espaces affines euclidiens . . . . .	185
4.4.3	Propriétés topologiques de $E_n$ . . . . .	186
4.4.4	Distance entre sous-ensembles . . . . .	189
4.4.5	Projection orthogonale . . . . .	189
4.4.6	Distance d'un point à un hyperplan . . . . .	190
4.4.7	Perpendiculaire commune . . . . .	192
4.5	Orthogonalité et perpendicularité . . . . .	195
4.6	Exercices . . . . .	197
4.7	Solutions des exercices . . . . .	200
<b>5</b>	<b>APPLICATIONS AFFINES</b>	<b>205</b>
5.1	Généralités . . . . .	205
5.1.1	Définitions . . . . .	205
5.1.2	Propriétés . . . . .	206
5.1.3	Généralisation . . . . .	208
5.1.4	Représentation matricielle d'une application affine . . . . .	210

5.2	Isomorphisme d'espaces affines . . . . .	211
5.3	Applications affines et barycentres . . . . .	212
5.4	Applications affines et variétés affines . . . . .	214
5.4.1	Image d'une variété affine par une application affine . . . . .	214
5.4.2	Points fixes d'une application affine . . . . .	216
5.5	Groupe affine. Le théorème fondamental . . . . .	216
5.6	Applications affines usuelles . . . . .	219
5.6.1	Homothétie . . . . .	219
5.6.2	Projection . . . . .	222
5.6.3	Symétrie . . . . .	227
5.6.4	Affinité . . . . .	231
5.6.5	Dilatation . . . . .	233
5.6.6	Transvection . . . . .	233
5.7	Exercices . . . . .	233
5.8	Solutions des exercices . . . . .	240
<b>6</b>	<b>GROUPE ORTHOGONAL</b>	<b>251</b>
6.1	Rappels sur les applications orthogonales . . . . .	252
6.1.1	Applications orthogonales . . . . .	252
6.1.2	Matrices orthogonales . . . . .	253
6.2	Groupe orthogonal . . . . .	254
6.3	Groupe spécial orthogonal . . . . .	255
6.3.1	Définition du groupe spécial orthogonal d'ordre $n$ . . . . .	255
6.3.2	Propriétés . . . . .	256
6.4	Groupe orthogonal en dimension 1 . . . . .	257
6.5	Groupe orthogonal en dimension 2 . . . . .	258
6.5.1	Généralités . . . . .	258
6.5.2	Cas des applications orthogonales positives en dimension 2 . . . . .	259
6.5.3	Cas des applications orthogonales négatives en dimension 2 . . . . .	262
6.5.4	Générateurs du groupe orthogonal en dimension 2 . . . . .	264
6.5.5	Interprétation géométrique des applications orthogonales positives en dimension 2 . . . . .	265
6.5.6	Interprétation géométrique des applications orthogonales négatives en dimension 2 . . . . .	268
6.6	Groupe orthogonal en dimension 3 . . . . .	269
6.6.1	Le théorème fondamental . . . . .	269

6.6.2	Classification des applications orthogonales en dimension 3	270
6.6.3	Générateurs du groupe orthogonal en dimension 3 . . . . .	276
6.6.4	Méthode pratique d'étude en dimension 3 . . . . .	277
6.7	Résumé . . . . .	278
6.8	Système générateur du groupe orthogonal . . . . .	279
6.8.1	Cas du groupe orthogonal . . . . .	279
6.8.2	Cas du groupe spécial orthogonal . . . . .	281
6.9	Centre du groupe orthogonal . . . . .	283
6.10	Classification des applications orthogonales . . . . .	286
6.11	Exercices . . . . .	288
6.12	Solutions des exercices . . . . .	295
<b>7</b>	<b>ANGLES</b>	<b>311</b>
7.1	Angles orientés de demi-droites . . . . .	312
7.1.1	Définition . . . . .	313
7.1.2	Étude de $\mathcal{A}$ . . . . .	314
7.1.3	Propriétés des angles orientés de demi-droites . . . . .	316
7.1.4	Cosinus et Sinus d'un angle . . . . .	318
7.1.5	Angles remarquables . . . . .	320
7.1.6	Bissectrice d'un couple de demi-droites vectorielles : approche géométrique . . . . .	323
7.2	Mesure des angles . . . . .	325
7.2.1	Théorème fondamental . . . . .	325
7.2.2	Bissectrice d'un couple de demi-droites vectorielles : approche algébrique . . . . .	328
7.2.3	Résolution de $n\varphi = a$ dans $\mathcal{A}$ . . . . .	328
7.3	Angles orientés de droites . . . . .	329
7.3.1	Définition . . . . .	329
7.3.2	Propriétés des angles orientés de droites . . . . .	333
7.3.3	Mesure des angles de droites . . . . .	333
7.3.4	Bissectrices d'un couple de droites . . . . .	335
7.4	Généralisation : angles dans un espace affine . . . . .	340
7.4.1	Angles géométriques . . . . .	340
7.4.2	Angles dans un espace affine de dimension 2 . . . . .	341
7.4.3	Applications des angles géométriques . . . . .	341
7.4.4	Généralisation en dimension $\geq 3$ . . . . .	343

7.4.5	Angle polaire d'une droite . . . . .	347
7.5	Produit vectoriel : approche géométrique . . . . .	347
<b>8</b>	<b>ISOMÉTRIES</b>	<b>351</b>
8.1	Généralités sur les isométries . . . . .	352
8.1.1	Définition . . . . .	352
8.1.2	Transformation orthogonale associée . . . . .	352
8.1.3	Symétries orthogonales . . . . .	354
8.1.4	Réflexion . . . . .	355
8.2	Groupe des isométries de $E_n$ . . . . .	357
8.2.1	Groupe $(Is(E_n), \circ)$ . . . . .	357
8.2.2	Déplacement . . . . .	359
8.3	Isométries de $E_1$ . . . . .	360
8.3.1	Déplacement . . . . .	361
8.3.2	Antidéplacement . . . . .	361
8.4	Isométries de $E_2$ . . . . .	361
8.4.1	Étude préliminaire . . . . .	362
8.4.2	Déplacements . . . . .	362
8.4.3	Antidéplacements . . . . .	369
8.4.4	Système générateur des isométries de $E_2$ . . . . .	373
8.4.5	Méthode élémentaire de recherche des isométries de $E_2$ . . . . .	373
8.4.6	Tableau récapitulatif des isométries de $E_2$ . . . . .	375
8.5	Isométries de $E_3$ . . . . .	376
8.5.1	Étude préliminaire . . . . .	376
8.5.2	Déplacements . . . . .	377
8.5.3	Antidéplacements . . . . .	381
8.5.4	Système générateur des isométries de $E_3$ . . . . .	385
8.5.5	Système générateur des isométries positives de $E_3$ . . . . .	385
8.5.6	Méthode pratique de recherche des isométries de $E_3$ . . . . .	390
8.5.7	Tableau récapitulatif des isométries de $E_3$ . . . . .	390
8.6	Système générateur des isométries de $E_n$ . . . . .	391
8.7	Quaternions et rotations de $E_3$ . . . . .	394
8.7.1	Problème . . . . .	394
8.7.2	Conclusion . . . . .	404
8.7.3	Applications . . . . .	405

8.7.4	Exemples . . . . .	409
8.8	Exercices . . . . .	411
8.9	Solutions des exercices . . . . .	418
<b>9</b>	<b>POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES</b>	<b>429</b>
9.1	Généralités . . . . .	429
9.1.1	Définition . . . . .	429
9.1.2	Propriétés . . . . .	430
9.2	Exemples de groupes d'isométries dans $E_2$ . . . . .	432
9.2.1	Deux points de $E_2$ . . . . .	432
9.2.2	Triangle équilatéral . . . . .	432
9.2.3	Parallélogramme . . . . .	434
9.2.4	Polygones réguliers convexes de $E_2$ . . . . .	438
9.2.5	Sous-groupes finis de $Is(E_2)$ . . . . .	440
9.3	Produit semi-direct de groupes . . . . .	441
9.4	Polyèdres réguliers convexes . . . . .	447
9.4.1	Tétraèdre régulier . . . . .	447
9.4.2	Étude du groupe $S_4$ . . . . .	455
9.4.3	Cube . . . . .	464
9.4.4	Octaèdre . . . . .	468
9.4.5	Icosaèdre . . . . .	469
9.4.6	Dodécaèdre . . . . .	472
9.4.7	Produit direct et groupes des polyèdres . . . . .	475
9.4.8	Groupe simple $A_5$ . . . . .	477
9.5	Exercices . . . . .	479
9.6	Solutions des exercices . . . . .	486
<b>10</b>	<b>SIMILITUDES</b>	<b>499</b>
10.1	Similitudes de $E_n$ . . . . .	499
10.1.1	Définition . . . . .	499
10.1.2	Propriétés . . . . .	500
10.1.3	Groupe Sim $E_n$ . . . . .	500
10.1.4	Similitudes directes et similitudes indirectes . . . . .	501
10.1.5	Similitudes vectorielles . . . . .	503
10.1.6	Treillis des sous-groupes de $GA(E_n)$ . . . . .	505
10.1.7	Centre d'une similitude . . . . .	506

10.2	Similitudes de $E_3$ . . . . .	507
10.3	Similitudes de $E_2$ . . . . .	508
10.3.1	Décomposition des similitudes de $E_2$ . . . . .	508
10.3.2	Écriture complexe des similitudes directes . . . . .	509
10.3.3	Écriture complexe des similitudes indirectes . . . . .	510
10.4	Similitudes et rapport de distances . . . . .	511
10.5	Exercices . . . . .	512
10.6	Solutions des exercices . . . . .	514
<b>11</b>	<b>ENDOMORPHISMES NORMAUX</b>	<b>519</b>
11.1	Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	519
11.1.1	Définition . . . . .	519
11.1.2	Propriétés . . . . .	520
11.2	Endomorphismes symétriques . . . . .	521
11.2.1	Définition . . . . .	521
11.2.2	Propriétés des endomorphismes symétriques . . . . .	522
11.2.3	Exemples d'endomorphismes symétriques. . . . .	525
11.3	Endomorphismes antisymétriques . . . . .	526
11.3.1	Définition . . . . .	526
11.3.2	Endomorphismes antisymétriques en dimension 3 . . . . .	527
11.4	Endomorphismes normaux . . . . .	528
11.4.1	Définition d'un endomorphisme normal . . . . .	528
11.4.2	Classification des endomorphismes normaux . . . . .	528
11.4.3	Classification des endomorphismes symétriques . . . . .	530
11.4.4	Classification des endomorphismes antisymétriques . . . . .	530
11.4.5	Classification des endomorphismes orthogonaux . . . . .	531
11.5	Quadriques . . . . .	532
11.5.1	Généralités . . . . .	532
11.5.2	Équation réduite d'une quadrique . . . . .	532
11.5.3	Nature des quadriques à centre . . . . .	534
11.5.4	Méthode pratique d'étude des quadriques . . . . .	535
11.5.5	Exemples . . . . .	536
<b>12</b>	<b>LE CERCLE</b>	<b>539</b>
12.1	Généralités . . . . .	539



12.2	Ensemble des points de $E_2$ vérifiant $\frac{MA}{MB} = k$ . . . . .	540
12.3	Arc et cercle capables . . . . .	540
12.3.1	Angles de droites à côtés orthogonaux . . . . .	540
12.3.2	Angle inscrit et angle au centre . . . . .	541
12.3.3	Cercle capable . . . . .	543
12.3.4	Arc capable . . . . .	544
12.3.5	Arcs et cercle capables par les nombres complexes . . . . .	545
12.4	Axe radical . . . . .	546
12.4.1	Puissance d'un point par rapport à un cercle . . . . .	546
12.4.2	Axe radical de deux cercles . . . . .	547
12.4.3	Intersection d'un cercle et d'une droite . . . . .	548
12.4.4	Conditions d'intersection de deux cercles . . . . .	549
12.4.5	Construction de l'axe radical . . . . .	550
12.5	Conditions de cocyclicité de quatre points de $E_2$ . . . . .	551
12.6	Cercles et inversion . . . . .	552
12.6.1	Équation d'une droite et d'un cercle en complexe . . . . .	552
12.6.2	Image des droites et des cercles par $T$ . . . . .	553
12.6.3	Inversion dans $E_2$ . . . . .	554
<b>13</b>	<b>LE TRIANGLE</b>	<b>559</b>
13.1	Médiatrices du triangle . . . . .	559
13.2	Médianes du triangle . . . . .	559
13.3	Hauteurs du triangle . . . . .	559
13.4	Bissectrices du triangle . . . . .	561
13.4.1	Généralités . . . . .	561
13.4.2	Propriétés des bissectrices d'un triangle . . . . .	562
13.4.3	Point d'intersection des bissectrices . . . . .	564
13.4.4	Cercle inscrit . . . . .	565
13.5	Droites de Simson . . . . .	566
13.6	Droite et cercle d'Euler . . . . .	568
13.7	Coordonnées barycentriques . . . . .	570
13.7.1	Cas général . . . . .	570
13.7.2	Points particuliers du triangle . . . . .	571
13.8	Relations métriques dans le triangle . . . . .	574
13.8.1	Loi des cosinus . . . . .	574

13.8.2	Loi des sinus . . . . .	575
13.8.3	Inversion et distance . . . . .	577
13.8.4	Théorème de la médiane . . . . .	578
13.9	Triangles isométriques et triangles semblables . . . . .	580
13.9.1	Cas d'isométrie des triangles . . . . .	580
13.9.2	Cas de similitude des triangles . . . . .	581
<b>14</b>	<b>LES CONIQUES</b>	<b>583</b>
14.1	Généralités sur les coniques . . . . .	584
14.1.1	Définition monofocale d'une conique . . . . .	584
14.1.2	Axe focal et sommets d'une conique . . . . .	584
14.2	Parabole . . . . .	585
14.2.1	Équation réduite d'une parabole . . . . .	585
14.2.2	Tangente et normale à la parabole . . . . .	586
14.2.3	Construction géométrique de la tangente et de la normale . . . . .	588
14.3	Coniques à centre . . . . .	589
14.3.1	Équation réduite d'une conique à centre . . . . .	589
14.3.2	Ellipse . . . . .	591
14.3.3	Hyperbole . . . . .	592
14.4	Approche bifocale des coniques à centre . . . . .	594
14.4.1	Définition bifocale des coniques à centre . . . . .	594
14.4.2	Rayons vecteurs des coniques à centre . . . . .	595
14.4.3	Construction des coniques à centre . . . . .	598
14.5	Courbes d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . . . . .	602
14.5.1	Méthode générale . . . . .	602
14.5.2	Méthode élémentaire . . . . .	602
14.6	Définitions équivalentes des coniques à centre . . . . .	603
14.7	Représentation paramétrique des coniques à centre . . . . .	604
14.7.1	Ellipse . . . . .	604
14.7.2	Hyperbole . . . . .	605
14.8	Tangente aux coniques à centre . . . . .	606
14.8.1	Équation des tangentes aux coniques à centre . . . . .	607
14.8.2	Propriétés géométriques des tangentes aux coniques à centre . . . . .	607
14.8.3	Propriété des tangentes communes aux coniques à centre . . . . .	608
14.8.4	Propriété des tangentes spécifique à l'ellipse . . . . .	609

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	19
14.8.5 Propriété des tangentes spécifique à l'hyperbole . . . . .	610
14.8.6 Construction géométrique des tangentes aux coniques . . .	611
14.9 Applications remarquables des coniques . . . . .	612
14.9.1 Projection orthogonale d'un cercle sur un plan . . . . .	612
14.9.2 Hyperbole équilatère et inversion . . . . .	614
<b>Bibliographie</b>	<b>617</b>
<b>Index</b>	<b>619</b>