

Table des matières

1	Le calcul d'une probabilité	1
1.1	L'espace fondamental	1
1.1.1	L'ensemble des événements	2
1.1.2	Quelques rappels sur les ensembles	3
1.2	Probabilité	4
1.3	Probabilité conditionnelle	6
1.4	Indépendance	8
1.5	Analyse combinatoire	9
1.5.1	Analyse combinatoire sans répétition	9
1.5.2	Analyse combinatoire avec répétition	10
1.6	Modèles d'urnes	11
1.6.1	Modèle du tirage avec remise ($n \geq 1$)	12
1.6.2	Modèle du tirage sans remise ($1 \leq n \leq N$)	12
1.7	Pour aller plus loin	13
1.7.1	Le problème de Méré	13
1.7.2	Les dates d'anniversaire	14
1.7.3	Le problème des rencontres	14
1.8	Exercices	18
1.8.1	Jeu de dés	18
1.8.2	Probabilité de gain	18
1.8.3	Tirages indépendants	18
1.8.4	Questionnaire à choix multiples	19
1.8.5	Test de dépistage	19
1.8.6	Dépistage d'une maladie rare	20
1.8.7	Marche aléatoire	20
1.9	Solutions des exercices	21
2	Modèles mathématiques du hasard univariés	29
2.1	Les concepts de base	30
2.2	Variable aléatoire réelle discrète	35

2.2.1	Loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$	36
2.2.2	Loi de Bernoulli	37
2.2.3	Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	37
2.2.4	Loi géométrique	38
2.2.5	Loi de Pascal	40
2.2.6	Loi de Poisson	40
2.3	Variable aléatoire réelle continue	42
2.3.1	Les paramètres principaux	43
2.3.2	Loi uniforme sur $[a, b]$	45
2.3.3	Loi exponentielle	45
2.3.4	Loi Gamma	46
2.3.5	Loi bêta	47
2.3.6	Loi gaussienne ou loi normale	49
2.3.7	Loi log-normale	50
2.3.8	Loi de Weibull	51
2.3.9	Loi de Cauchy	51
2.3.10	Loi de Laplace ou double exponentielle	52
2.4	Fonction d'une variable aléatoire	53
2.5	Diverses inégalités	54
2.6	Pour aller plus loin	55
2.6.1	La loi de Benford	55
2.6.2	Modèles de valeurs extrêmes et lois max-stables	57
2.6.3	L'escalier du diable	59
2.7	Exercices	60
2.7.1	Variable aléatoire discrète non-intégrable	60
2.7.2	Gestion optimale de stock	61
2.7.3	Économie d'analyses - Loi binomiale	61
2.7.4	Fiabilité - Loi binomiale	62
2.7.5	Loi géométrique	62
2.7.6	Le problème du collectionneur - Loi géométrique	62
2.7.7	Contrôle de qualité - Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson	63
2.7.8	Loi de Cauchy	63
2.7.9	Loi binomiale et loi de Poisson	64
2.7.10	Salaires - Loi log-normale	64
2.7.11	Fonction de répartition et espérance	65
2.7.12	L'entropie en probabilités	65
2.8	Solutions des exercices	66
2.9	Résumé	80

3	Modèles mathématiques du hasard multivariés	83
3.1	Les concepts de base	83
3.1.1	Loi du vecteur \mathbf{X}	84
3.1.2	Fonction de répartition	84
3.1.3	Densité	85
3.1.4	Espérance	85
3.1.5	Matrice de covariance	85
3.1.6	Matrice de corrélation	86
3.1.7	Exemple de loi discrète : la loi multinomiale	87
3.1.8	Loi gaussienne multidimensionnelle	88
3.2	Lois marginales	88
3.2.1	Cas discret	89
3.2.2	Cas à densité	90
3.3	Indépendance	90
3.4	Calcul sur les vecteurs aléatoires	91
3.4.1	Cas à densité	92
3.4.2	Applications	92
3.4.3	Théorème du transfert multidimensionnel	93
3.5	Lois et espérances conditionnelles	93
3.5.1	Cas discret	93
3.5.2	Cas à densité	93
3.5.3	Espérance conditionnelle	94
3.5.4	Interprétation géométrique dans L^2	94
3.6	Pour aller plus loin	96
3.6.1	La loi de Dirichlet	96
3.6.2	Les statistiques fondées sur les rangs	97
3.6.3	Copules et dépendance	98
3.7	Exercices	100
3.7.1	Séries de faces	100
3.7.2	Loi multinomiale	100
3.7.3	Changement de variables	100
3.7.4	Coefficient de corrélation de Spearman	101
3.7.5	Autocorrélation des rangs de Spearman	102
3.7.6	Tirages aléatoires et covariance	102
3.7.7	Lois gamma et changement de variables	103
3.7.8	Produit et quotient de variables aléatoires	103
3.7.9	Indépendance après changement de variables	103
3.7.10	Inf de lois exponentielles	104
3.7.11	Quotient de deux gaussiennes	104
3.7.12	Changement de variables - Lois conditionnelles	104
3.7.13	Jeu de pile ou face - Espérance et variance conditionnelles	105

3.8	Solutions des exercices	105
4	Fonction caractéristique, vecteurs gaussiens	127
4.1	Un outil : la fonction caractéristique	127
4.2	Premières applications	129
4.3	Fonction car. d'un vecteur aléatoire	131
4.4	Vecteurs gaussiens	132
4.4.1	Rappels	132
4.4.2	Premières définitions et théorèmes	133
4.4.3	Indépendance des vecteurs gaussiens	133
4.4.4	Loi conditionnelle	134
4.5	Principales lois issues de la loi normale	134
4.5.1	Loi du χ^2 (Khi-deux)	134
4.5.2	Loi de Student	135
4.5.3	Loi de Fisher-Snedecor	136
4.6	Pour aller plus loin	137
4.6.1	Le problème des moments	137
4.6.2	Identification du modèle gaussien	139
4.7	Exercices	140
4.7.1	Vecteur gaussien - Changement de variables	140
4.7.2	Fiabilité - Lois gamma - lois conditionnelles	140
4.7.3	Loi du khi-deux	141
4.8	Solutions des exercices	142
4.9	Résumé	148
5	Convergences et grands théorèmes	151
5.1	Diverses notions de convergence	151
5.1.1	Convergence en loi	151
5.1.2	Convergence en probabilité	154
5.1.3	Convergence dans L^r , $r \geq 1$	154
5.1.4	Convergence presque sûre	156
5.1.5	Relations entre les divers modes de convergence	157
5.2	Les grands théorèmes	158
5.2.1	Loi forte des grands nombres	158
5.2.2	Loi faible des grands nombres	160
5.2.3	Théorème central limite	160
5.2.4	Cas multivarié	163
5.3	Pour aller plus loin	163
5.3.1	La distance de Prokhorov	163
5.3.2	Contre-exemple pour le théorème central limite	165
5.4	Exercices	166

5.4.1	Fonction caractéristique et convergence en loi	166
5.4.2	Convergence en probabilité	166
5.4.3	Approximation gaussienne de la loi binomiale	167
5.5	Solutions des exercices	167
6	Simulation et méthodes de Monte-Carlo	173
6.1	les nombres au hasard	173
6.2	Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires	175
6.2.1	Les générateurs récursifs multiples	176
6.3	Les perspectives actuelles	180
6.3.1	Les récurrences linéaires modulo 2	180
6.3.2	Les générateurs combinés	182
6.4	Simulation d'une loi de probabilité	183
6.4.1	Simulation par la méthode d'inversion	184
6.4.2	Simulation d'une loi gaussienne	184
6.4.3	Simulation par la méthode du rejet	187
6.4.4	Simulation d'une loi Gamma	188
6.4.5	Simulation d'une loi de Dirichlet	189
6.5	Méthodes de Monte-Carlo	189
6.6	Pour aller plus loin	191
6.6.1	Méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov	191
6.6.2	L'algorithme de Metropolis-Hastings	191
6.7	Exercices	192
6.7.1	Simulation d'une loi discrète	192
6.7.2	Simulation d'une loi de Poisson	193
6.7.3	Simulation d'une loi gaussienne	194
6.8	Solutions des exercices	194
7	Modèles à queues lourdes	199
7.1	Introduction	199
7.2	Classification des distributions	200
7.3	Lois de Pareto	202
7.4	Lois alpha-stables univariées	204
7.4.1	Définitions et résultats préliminaires	204
7.4.2	Densité de probabilité	206
7.4.3	Propriétés algébriques et asymptotiques des distributions alpha-stables	209
7.4.4	Théorème central limite général	210
7.5	Simulation de loi stable	210
7.5.1	Première étape	210
7.5.2	Deuxième étape	211

7.5.3	Troisième étape	211
7.6	Pour aller plus loin	211
7.6.1	Quand choisir un modèle alpha-stable?	211
7.6.2	Cas multivarié	212
7.6.3	Mesures de dépendance : covariation et autres	214
7.7	Exercice	215
7.8	Solution de l'exercice	216
8	Ajustement d'un modèle	217
8.1	Le théorème fondamental de l'aléatoire	217
8.2	Moyenne et variance empiriques	221
8.3	Notion d'estimateur	224
8.4	Quantité d'information	227
8.4.1	Fonction de vraisemblance	227
8.4.2	Exhaustivité	227
8.4.3	Information de Fisher	228
8.5	Estimation sans biais de variance minimum	229
8.6	La méthode des moments	230
8.7	La méthode du maximum de vraisemblance	231
8.7.1	Calcul	231
8.7.2	Convergence	231
8.8	La méthode des moindres carrés	232
8.8.1	Mise en place du problème des moindres carrés	232
8.8.2	Solution du problème des moindres carrés	233
8.8.3	Evaluation de la qualité de l'ajustement	234
8.8.4	La famille des modèles linéarisables	235
8.9	Intervalles de confiance et de fluctuation	235
8.10	Pour aller plus loin	236
8.10.1	L'estimation robuste	236
8.10.2	Le bootstrap	238
8.10.3	Les moindres carrés récursifs	238
8.11	Exercices	242
8.11.1	Moyenne et variance empiriques - Cas gaussien	242
8.11.2	Estimation - Loi uniforme sur un intervalle (1)	242
8.11.3	Estimation - Loi uniforme sur un intervalle (2)	243
8.11.4	Estimation - Loi de Weibull	243
8.11.5	Estimation - Densité puissance	243
8.11.6	Estimation - Loi exponentielle translatée (1)	244
8.11.7	Estimation - Loi exponentielle translatée (2)	244
8.11.8	Estimation - Loi gamma	245
8.11.9	Estimation sans biais de l'écart-type - Loi gaussienne	245

8.11.10 Estimation - Loi log-normale	247
8.11.11 Régression orthogonale	247
8.12 Solutions des exercices	248
9 Modèles de mélange	269
9.1 Introduction	269
9.1.1 Le modèle de base	270
9.1.2 Un modèle à données manquantes	270
9.1.3 Un modèle à variables latentes	271
9.1.4 D'autres contextes et d'autres noms	278
9.2 Les problèmes d'identifiabilité	280
9.2.1 Généralités et définition	281
9.2.2 Théorèmes et applications	282
9.3 L'estimation des paramètres	284
9.3.1 Un problème difficile	284
9.3.2 La méthode des moments	285
9.3.3 Le maximum de vraisemblance	288
9.3.4 L'algorithme EM	290
9.4 Pour aller plus loin	296
9.4.1 Le nombre de composants d'un mélange	296
9.4.2 Chaîne de Markov à sauts réversibles	298
9.5 Conclusion générale	298
9.6 Exercices	299
9.6.1 Le poids d'un fruit d'une récolte	299
9.6.2 Statistique de test - mélange gaussien	299
9.6.3 Mélanges de lois exponentielles	299
9.7 Solutions des exercices	300
A Lexique commenté	305
B Tables	311
B.1 Présentation	311
B.2 Tables	312
Bibliographie	317
Index	319