

■ Formulaire d'analyse vectorielle ■

■ Composition d'opérateurs Composition de champs

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V = \Delta V$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (V_1 V_2) = V_1 \overrightarrow{\text{grad}} V_2 + V_2 \overrightarrow{\text{grad}} V_1$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (V \vec{A}) = V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \wedge \vec{A}$$

$$\text{div} (V \vec{A}) = V \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{A}$$

$$\text{div} (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2$$

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

Théorème d'Ostrogradsky : $\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{A} \, d\tau$

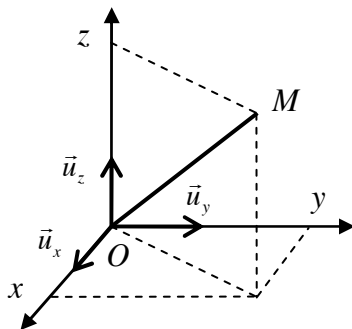
Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur à cette surface.

Théorème de Stokes : $\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{M} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$

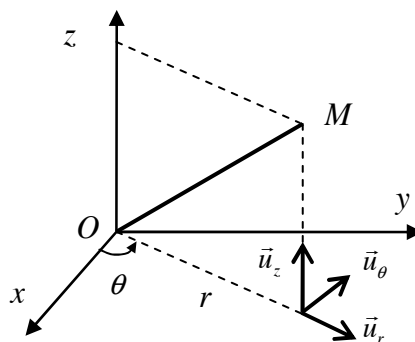
La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

■ Systèmes de coordonnées

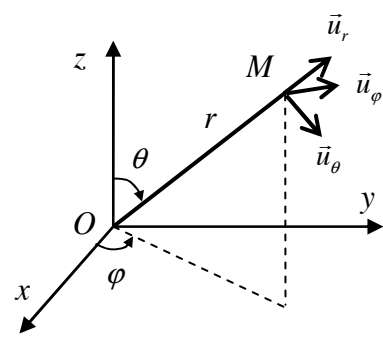
cartésiennes



cylindriques



sphériques



■ Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \overline{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \overline{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overline{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \overline{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Les vecteurs unitaires \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z en chaque point, constituent des champs uniformes et ont tous une divergence et un rotationnel nuls.

■ Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Vecteurs unitaires : $\text{div } \vec{u}_r = \frac{1}{r}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_r = \vec{0}$; $\text{div } \vec{u}_\theta = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_z}{r}$; $\text{div } \vec{u}_z = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z = \vec{0}$

■ Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Quelques résultats utiles : $\text{div } \vec{u}_r = \frac{2}{r}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_r = \vec{0}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_z}{r \sin \theta}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$

NB : Ne pas utiliser l'opérateur Nabla en coordonnées cylindriques ou sphériques.

■ Petit formulaire pour les calculs en physique

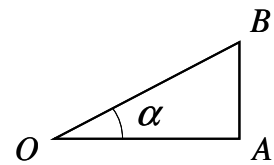
■ Équation du second degré

Avant de chercher les solutions d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$, il est impératif d'obtenir des renseignements sur le signe des racines (ou de leur partie réelle); pour cela il suffit de voir le signe de leur somme $S = -b/a$ et de leur produit $P = c/a$.

■ Formules de trigonométrie

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{OB}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OA}{OB}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{OA}$$



Il faut connaître les formules de trigonométrie, en particulier : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

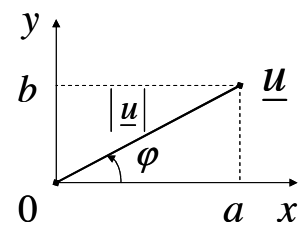
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (\text{le - d'abord !})$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad \text{et} \quad \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

■ Les nombres complexes

– dans l'écriture mathématique $\underline{u} = a + ib$ apparaissent les parties réelle $a = |\underline{u}| \cos \varphi$ et imaginaire $b = |\underline{u}| \sin \varphi$, avec $|\underline{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arg \underline{u} = \arctan(b/a)$ (à π près, il faut en plus préciser $\sin \varphi$ ou $\cos \varphi$) soit $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.



– en physique, on préfère souvent écrire $\underline{u} = |\underline{u}| \exp(i\varphi)$ en faisant apparaître directement le module $|\underline{u}|$ et la phase (ou argument) φ .

$$\text{Rappel : } \left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{|\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|} \quad \text{et} \quad \arg \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \arg \underline{u}_2 - \arg \underline{u}_1$$

■ Projection d'un vecteur

Il faut particulièrement veiller aux signes des projections.

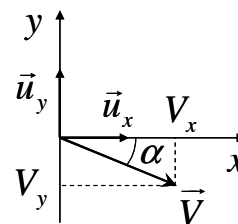
sur la figure : $V_x = \vec{V} \cdot \vec{u}_x > 0$ et $V_y = \vec{V} \cdot \vec{u}_y < 0$

avec $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y$

Théorème de Pythagore : $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ car $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$

Avec l'angle α (pris positif), $V_x = V \cos \alpha > 0$ et $V_y = -V \sin \alpha < 0$

Le théorème de Pythagore redonne $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.



■ Moyenne de fonctions temporelles

Si $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\langle u \rangle = 0$ et $\langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} u_0^2$

Utilisation de la notation complexe pour les grandeurs énergétiques moyennes (attention, aucune grandeur énergétique ne peut être complexe !).

Si $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ et $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{f} \cdot \underline{g}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{f} \cdot \underline{g}) = \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \varphi \quad \text{et} \quad \langle f^2 \rangle = \frac{1}{2} |\underline{f}|^2$$

■ Formule de Taylor à l'ordre 1

Il faut savoir faire le lien entre :

– l'écriture mathématique : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + \dots$

– et l'écriture physique : $u(x_0 + dx) - u(x_0) = du = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_0} dx + \dots$

Pour x , $|x| \ll 1$, on a $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\tan x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$, $e^x \approx 1+x$, $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \dots$

Et si $u(x, y)$ est une fonction de deux variables, à l'ordre 1 : $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

Le théorème de Schwarz indique que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

■ Une grandeur petite ne doit être prise nulle

De la même manière qu'en mathématique une fonction n'est pas « équivalente à zéro », en physique non plus une grandeur petite ne doit être prise nulle ; si elle intervient dans une fonction, il suffit (en général) de prendre le premier terme non nul du développement limité de cette fonction.

En revanche, à l'ordre un en ε , on a simplement $\varepsilon \cdot f(\varepsilon) = \varepsilon [f(0) + f'(0)\varepsilon + \dots] \approx \varepsilon \cdot f(0)$.

■ Formule du binôme

Surtout appliquée aux développements limités (ε tel que $|\varepsilon| \ll 1$ est l'infiniment petit)

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!} \varepsilon^2 + \dots$$

Par exemple : $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$; $\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$; $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}$

Dans le cas $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2$, il ne faut pas faire d'abord le développement limité de la racine puis celui de l'inverse, mais les deux simultanément !

■ Disque, cylindre et sphère

Disque : périmètre $2\pi r$; surface πr^2 ; élément de surface d'une couronne circulaire entre r et $r + dr$: $2\pi r dr$.

Cylindre : surface latérale $2\pi r h$; volume $\pi r^2 h$; élément de volume d'une coquille circulaire entre r et $r + dr$: $2\pi r dr h$.

Sphère : surface $4\pi r^2$; volume $\frac{4\pi r^3}{3}$; élément de volume d'une coquille sphérique entre r et $r + dr$: $4\pi r^2 dr$.

■ Formules de trigonométrie hyperbolique

Relations fondamentales : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x ; (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx) ; \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) ; \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) ; \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivées : $\frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$; $\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$; $\frac{d}{dx} \operatorname{th} x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{coth} x = 1 - \operatorname{coth}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} ; \frac{d}{dx} \operatorname{argch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} ; \frac{d}{dx} \operatorname{arth} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

Développements limités au voisinage de zéro :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) ; \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) ; \operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

■ Équation différentielle du premier ordre

$$\text{du type : } \tau \frac{dx}{dt} + x = x_0 \cos \omega t$$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime transitoire** (ou libre en l'absence d'excitation $x_0 \cos \omega t$) est solution de

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\tau} \text{ soit } x_t(t) = A \exp(-t/\tau) ; \text{ ce régime transitoire tend vers zéro.}$$

– **le régime forcé** (par l'excitation) est une solution particulière recherchée sous la forme d'une fonction de même pulsation ω , mais déphasée (retard φ), $x_f(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$$(i\omega\tau + 1)\underline{x} = x_0 \Rightarrow \underline{x} = X e^{-i\varphi} = \frac{x_0}{1 + i\omega\tau} \text{ d'où } X = \frac{x_0}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \text{ et } \tan \varphi = \omega\tau$$

NB : La détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale $x_t(t) + x_f(t)$!

■ Équation différentielle classique du second ordre

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ admet comme solution : $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ ou $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ admet comme solution : $x(t) = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}$ ou $x(t) = A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t$

■ Équation différentielle du second ordre en régime forcé

$$\text{du type : } a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = e \cos(\omega t) \text{ où } \dot{u} = \frac{du}{dt} \text{ et } \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Les coefficients a , b et c sont constants (et positifs pour un système physique)

Le régime forcé (par l'excitation $e \cos(\omega t)$ à la pulsation ω) est une solution particulière de l'équation, elle-même de pulsation ω , mais déphasée (retard φ) sur l'excitation :

$u(t) = U \cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant obligatoirement en **notation complexe** :

$$(-a\omega^2 + bi\omega + c)\underline{u} = e \Rightarrow \underline{u} = U e^{-i\varphi} = \frac{e}{c - a\omega^2 + ib\omega} \text{ d'où par module et argument :}$$

$$U = \frac{e}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \text{ et } \tan \varphi = \frac{b\omega}{c - a\omega^2} \text{ (à préciser par le signe de } \sin \varphi)$$

■ Équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\text{du type : } a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = e \cos(\omega t) \quad \text{où } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime libre** (car l'excitation $e \cos(\omega t)$ disparaît) est solution de $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$

L'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ avec en physique les trois constantes a , b et c positives, conduit à $S = -b/a \leq 0$ et $P = c/a \geq 0$ d'où les deux cas :

- si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (ce qui suppose un fort coefficient de frottement b), les deux racines sont réelles négatives, notées $-r_1$ et $-r_2$, d'où une solution en exponentielles décroissantes : $x(t) = A \exp(-r_1 t) + B \exp(-r_2 t)$ appelé régime transitoire (car il tend vers zéro) apériodique
- si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (ce qui suppose un faible coefficient de frottement b), les deux racines sont complexes conjuguées à partie réelle négative, notées $-r \pm i\Omega$, d'où une solution (somme des 2 exponentielles complexes) oscillatoire d'amplitude en exponentielle décroissante :

$$x(t) = \exp(-rt) \cdot (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \quad \text{ou} \quad x(t) = \alpha \exp(-rt) \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{ou } x(t) = \beta \exp(r_1 t) + \gamma \exp(r_2 t) \quad (r_1 \text{ et } r_2 \text{ racines complexes})$$

appelé régime transitoire pseudopériodique

À noter que dans tous les cas, le régime transitoire disparaît (tend vers zéro). Le régime critique est celui (un peu théorique) où $\Delta = 0$.

– **le régime forcé** (par l'excitation) est solution particulière de $a\ddot{x} + b\dot{x} + c = e \cos(\omega t)$; elle se cherche sous la forme d'une fonction de même pulsation, mais déphasée (retard φ) : $x(t) = X \cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$$(-a\omega^2 + bi\omega + c)\underline{x} = e \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = X e^{-i\varphi} = \frac{e}{c - a\omega^2 + ib\omega} \quad \text{d'où } X \text{ et } \tan \varphi$$

NB : la détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale !

Chapitre 1

■ Ondes mécaniques ■

Les ordres de grandeur utiles

La corde vibrante

fil souple de TP (en coton) masse linéique ; tension célérité	$\mu = 1 \text{ g.m}^{-1}$; $T = 1 \text{ N}$ (masse de 100 g) $c = \sqrt{T/\mu} = 32 \text{ m.s}^{-1}$
corde de piano (en acier) masse linéique ; tension célérité	$\mu = 6 \text{ g.m}^{-1}$; $T = 800 \text{ N}$ (sous 80 kg) $c = \sqrt{T/\mu} = 365 \text{ m.s}^{-1}$

Matériaux solides élastiques

métaux : masse volumique module d'Young célérité	$\rho \approx 2.10^3 \text{ à } 20.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ $E \approx 0,7.10^{11} \text{ à } 2.10^{11} \text{ Pa}$ $c = \sqrt{E/\rho} \approx 3.10^3 \text{ à } 5.10^3 \text{ m.s}^{-1}$
non métaux : masse volumique module d'Young célérité	$\rho \approx 1.10^3 \text{ à } 2.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ $E \approx 10^{10} \text{ Pa}$ $c = \sqrt{E/\rho} \approx 3.10^3 \text{ m.s}^{-1}$

Le câble coaxial (idéal)

capacité linéique	$C \approx 4,4.10^{-11} \text{ F.m}^{-1}$
inductance linéique	$L \approx 2,5.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
résistance caractéristique	$R_c = \sqrt{L/C} = 75 \text{ } \Omega$
célérité des signaux électriques	$1/\sqrt{LC} = c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Le cours d'abord

■ La corde vibrante

1. Quelles sont les hypothèses physiques faites sur la corde vibrante ?
2. Définir la tension $\vec{T}(x,t)$ en un point de la corde sans raideur et donner ses caractéristiques. Pourquoi un élément de corde est-il équivalent à un système masse-ressort ? Qu'est-ce qui joue le rôle de force de rappel (un dessin peut aider) ?