■ Formulaire d'analyse vectorielle ■

■ Composition d'opérateurs   Composition de champs

$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V = \vec{0}$

$\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = 0$

$\text{div}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V = \Delta V$

$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$

$\overrightarrow{\text{grad}}\ (V_1 V_2) = V_1\,\overrightarrow{\text{grad}}\ V_2 + V_2\,\overrightarrow{\text{grad}}\ V_1$

$\overrightarrow{\text{rot}}\ (V\vec{A}) = V\,\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\ V \wedge \vec{A}$

$\text{div}\ (V\vec{A}) = V\,\text{div}\ \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\ V . \vec{A}$

$\text{div}\ (\vec{A_1} \wedge \vec{A_2}) = \vec{A_2}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A_1} - \vec{A_1}.\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A_2}$

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}$$

Théorème d'Ostrogradsky : $\displaystyle\oiint_{(S)} \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div}\vec{A}\ d\tau$

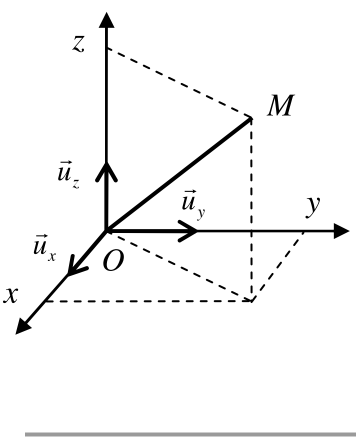
Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue au volume intérieur à cette surface.

Théorème de Stokes : $\displaystyle\oint_{(C)} \vec{A}.\overrightarrow{dM} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}.\overrightarrow{dS}$

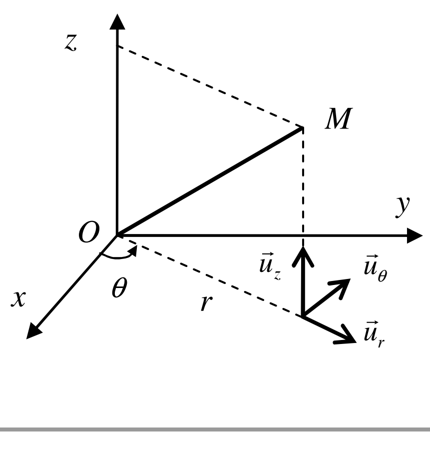
La circulation d'un champ de vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

■ Systèmes de coordonnées

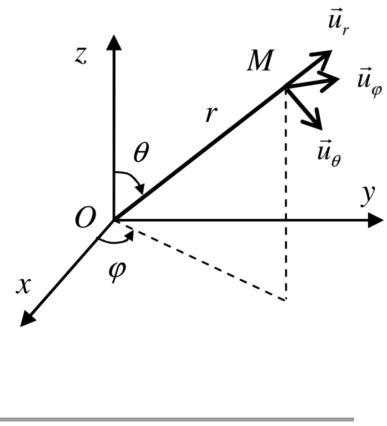
cartésiennes



cylindriques



sphériques



■ Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta V = \vec{\nabla}^2\ V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ en chaque point, constituent des champs uniformes et ont tous une divergence et un rotationnel nuls.

■ Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Vecteurs unitaires : $\text{div}\,\vec{u}_r = \frac{1}{r}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_r = \vec{0}$; $\text{div}\ \vec{u}_\theta = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_z}{r}$; $\text{div}\ \vec{u}_z = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_z = \vec{0}$

■ Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Quelques résultats utiles : $\text{div}\ \vec{u}_r = \frac{2}{r}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_r = \vec{0}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_z}{r\sin\theta}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$

NB : Ne pas utiliser l'opérateur Nabla en coordonnées cylindriques ou sphériques.

■ Petit formulaire pour les calculs en physique

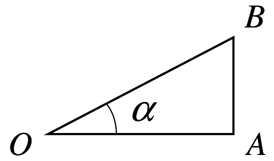
■ Équation du second degré

Avant de chercher les solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$, il est impératif d'obtenir des renseignements sur le signe des racines (ou de leur partie réelle) ; pour cela il suffit de voir le signe de leur somme $S=-b/a$ et de leur produit $P=c/a$.

■ Formules de trigonométrie

$$\sin\alpha=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypothénuse}}=\frac{AB}{OB}\,,\quad \cos\alpha=\frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypothénuse}}=\frac{OA}{OB}$$

$$\tan\alpha=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}}=\frac{AB}{OA}$$



Il faut connaître les formules de trigonométrie, en particulier : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\ ;\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ ;\ \sin 2x=2\sin x\cos x$$

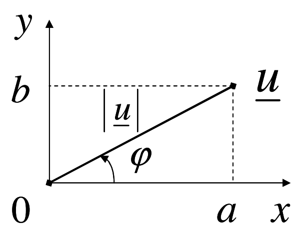
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\ ;\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\quad\text{et}\quad \sin p+\sin q=2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$$ (<u>le – d'abord</u> !)

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)\quad\text{et}\quad \sin a\sin b=\frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

■ Les nombres complexes

– dans l'écriture mathématique $\underline{u}=a+\mathrm{i}b$ apparaissent les parties réelle $a=|\underline{u}|\cos\varphi$ et imaginaire $b=|\underline{u}|\sin\varphi$, avec $|\underline{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi=\arg\underline{u}=\arctan(b/a)$ (à π près, il faut en plus préciser $\sin\varphi$ ou $\cos\varphi$) soit $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.



– en physique, on préfère souvent écrire $\underline{u}=|\underline{u}|\exp(\mathrm{i}\varphi)$ en faisant apparaître directement le module $|\underline{u}|$ et la phase (ou argument) φ.

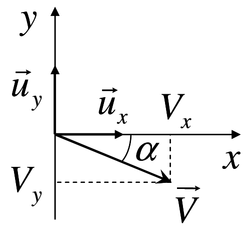
Rappel : $\left|\dfrac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}\right|=\dfrac{|\underline{u}_2|}{|\underline{u}_1|}$ et $\arg\dfrac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}=\arg\underline{u}_2-\arg\underline{u}_1$

■ Projection d'un vecteur

Il faut particulièrement veiller aux signes des projections.

sur la figure : $V_x = \vec{V}.\vec{u}_x > 0$ et $V_y = \vec{V}.\vec{u}_y < 0$

avec $\vec{V} = V_x\,\vec{u}_x + V_y\,\vec{u}_y$



Théorème de Pythagore : $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ car $V^2 = \vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$

Avec l'angle α (pris positif), $V_x = V\cos\alpha > 0$ et $V_y = -V\sin\alpha < 0$

Le théorème de Pythagore redonne $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

■ Moyenne de fonctions temporelles

Si $u(t) = u_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors sur une période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $<u> = 0$ et $<u^2> = \dfrac{1}{2}u_0^2$

Utilisation de la notation complexe pour les grandeurs énergétiques moyennes (attention, aucune grandeur énergétique ne peut être complexe !).

Si $f(t) = f_0\cos(\omega t)$ et $g(t) = g_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors :

$$<fg> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}.\underline{g}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{f}^*.\underline{g}) = \frac{1}{2}f_0 g_0\cos\varphi \quad \text{et} \quad <f^2> = \frac{1}{2}|\underline{f}|^2$$

■ Formule de Taylor à l'ordre 1

Il faut savoir faire le lien entre :

– l'écriture mathématique : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h\dfrac{df}{dx}(x_0) + ...$

– et l'écriture physique : $u(x_0 + dx) - u(x_0) = du = \left.\dfrac{du}{dx}\right)_{x=x_0} dx + ...$

Pour x, $|x| \ll 1$, on a $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\tan x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$, $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$,…

Et si $u(x, y)$ est une fonction de deux variables, à l'ordre 1 : $\mathrm{d}u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$

Le théorème de Schwarz indique que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

■ Une grandeur petite ne doit être prise nulle

De la même manière qu'en mathématique une fonction n'est pas « équivalente à zéro », en physique non plus une grandeur petite ne doit être prise nulle ; si elle intervient dans une fonction, il suffit (en général) de prendre le premier terme non nul du développement limité de cette fonction.

En revanche, <u>à l'ordre un</u> en ε, on a simplement $\varepsilon.f(\varepsilon) = \varepsilon\left[f(0) + f'(0)\varepsilon + ...\right] \approx \varepsilon.f(0)$.

Formule du binôme

Surtout appliquée aux développements limités (ε tel que $|\varepsilon| \ll 1$ est l'infiniment petit)

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + ...$$

Par exemple : $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$; $\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1+\varepsilon$; $\sqrt{1\pm\varepsilon} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}$

Dans le cas $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2$, il ne faut pas faire d'abord le développement limité de la racine puis celui de l'inverse, mais les deux simultanément !

Disque, cylindre et sphère

Disque : périmètre $2\pi r$; surface πr^2 ; élément de surface d'une couronne circulaire entre r et $r+dr$: $2\pi r dr$.

Cylindre : surface latérale $2\pi rh$; volume $\pi r^2 h$; élément de volume d'une coquille circulaire entre r et $r+dr$: $2\pi r dr h$.

Sphère : surface $4\pi r^2$; volume $4\pi r^3/3$; élément de volume d'une coquille sphérique entre r et $r+dr$: $4\pi r^2 dr$.

Formules de trigonométrie hyperbolique

Relations fondamentales : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \text{ ; } (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx) \text{ ; } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \text{ ; } \operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \text{ ; } \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Dérivées : $\frac{d}{dx}\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$; $\frac{d}{dx}\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$; $\frac{d}{dx}\operatorname{th} x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{coth} x = 1 - \operatorname{coth}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \text{ ; } \frac{d}{dx}\operatorname{argch} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ ; } \frac{d}{dx}\operatorname{arth} x = \frac{1}{1-x^2}$$

Développements limités au voisinage de zéro :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \text{ ; } \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right) \text{ ; } \operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$$

■ Équation différentielle du premier ordre

$$\text{du type : } \tau\frac{dx}{dt} + x = x_0 \cos \omega t$$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime transitoire** (ou libre en l'absence d'excitation $x_0 \cos \omega t$) est solution de $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{\tau}$ soit $x_t(t) = A\exp(-t/\tau)$; ce régime transitoire tend vers zéro.

– **le régime forcé** (par l'excitation) est une solution particulière recherchée sous la forme d'une fonction de même pulsation ω, mais déphasée (retard φ), $x_f(t) = X\cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$$(i\omega\tau + 1)\underline{x} = x_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = X e^{-i\varphi} = \frac{x_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{d'où} \quad X = \frac{x_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \omega\tau$$

NB : La détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale $x_t(t) + x_f(t)$!

■ Équation différentielle classique du second ordre

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ admet comme solution : $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ou $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ admet comme solution : $x(t) = a\,\mathrm{e}^{\omega t} + b\,\mathrm{e}^{-\omega t}$ ou $x(t) = A\,\mathrm{ch}\,\omega t + B\,\mathrm{sh}\,\omega t$

■ Équation différentielle du second ordre en régime forcé

$$\text{du type : } a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = e\cos(\omega t) \quad \text{où} \quad \dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Les coefficients a, b et c sont constants (et positifs pour un système physique)

Le régime forcé (par l'excitation $e\cos(\omega t)$ à la pulsation ω) est une solution particulière de l'équation, elle-même de pulsation ω, mais déphasée (retard φ) sur l'excitation :

$u(t) = U\cos(\omega t - \varphi)$, soit en passant obligatoirement en **notation complexe** :

$$(-a\omega^2 + bi\omega + c)\underline{u} = e \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = U e^{-i\varphi} = \frac{e}{c - a\omega^2 + ib\omega} \quad \text{d'où par module et argument :}$$

$$U = \frac{e}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{b\omega}{c - a\omega^2} \quad \text{(à préciser par le signe de } \sin\varphi\text{)}$$

■ Équation différentielle du second ordre à coefficients constants

du type : $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=e\cos(\omega t)$ où $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ et $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$

L'équation étant linéaire, la solution générale est la superposition d'une solution générale de l'équation sans second membre (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation générale (régime forcé).

– **le régime libre** (car l'excitation $e\cos(\omega t)$ disparaît) est solution de $a\ddot{x}+b\dot{x}+c=0$

L'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ avec en physique les trois constantes a, b et c positives, conduit à $S=-b/a\leq 0$ et $P=c/a\geq 0$ d'où les deux cas :

- si $\Delta=b^2-4ac>0$ (ce qui suppose un fort coefficient de frottement b), les deux racines sont <u>réelles négatives</u>, notées $-r_1$ et $-r_2$, d'où une solution en exponentielles décroissantes : $x(t)=A\exp(-r_1t)+B\exp(-r_2t)$ appelé régime transitoire (car il tend vers zéro) <u>apériodique</u>
- si $\Delta=b^2-4ac<0$ (ce qui suppose un faible coefficient de frottement b), les deux racines sont <u>complexes conjuguées à partie réelle négative</u>, notées $-r\pm i\Omega$, d'où une solution (somme des 2 exponentielles complexes) oscillatoire d'amplitude en exponentielle décroissante :

$$x(t)=\exp(-rt).(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t) \quad \text{ou} \quad x(t)=\alpha\exp(-rt).\cos\left(\Omega t+\varphi\right)$$

ou $x(t)=\beta\exp(r_1t)+\gamma\exp(r_2t)$ (r_1 et r_2 racines complexes)

appelé régime transitoire <u>pseudopériodique</u>

À noter que dans tous les cas, le régime transitoire disparaît (tend vers zéro). Le régime critique est celui (un peu théorique) où $\Delta=0$.

– **le régime forcé** (par l'excitation) est solution particulière de $a\ddot{x}+b\dot{x}+c=e\cos(\omega t)$; elle se cherche sous la forme d'une fonction de même pulsation, mais déphasée (retard φ) : $x(t)=X\cos(\omega t-\varphi)$, soit en passant en notation complexe :

$$(-a\omega^2+bi\omega+c)\underline{x}=e \quad \Rightarrow \quad \underline{x}=X\,e^{-i\varphi}=\frac{e}{c-a\omega^2+ib\omega} \quad \text{d'où } X \text{ et } \tan\varphi$$

NB : la détermination des constantes d'intégration doit se faire sur la solution générale !

Chapitre 1
■ Traitement du signal ■

Les ordres de grandeur utiles

Les composants

Résistances en électronique	1 kΩ à 1 MΩ
Capacités en électronique	1 nF à 100 μF

Le matériel de TP

Temps de montée du créneau d'un GBF	dV/dt ≈ 50 V/μs
Résistance de sortie d'un GBF	50 Ω
Fréquence maximum d'un GBF	10 MHz
Bande passante d'un oscilloscope	60 MHz
Impédance d'entrée d'un oscilloscope	R_e = 1 MΩ // C_e = 10 pF

Constantes de temps des dipôles classiques

constante de temps du dipôle RC $\tau = RC$	R = 1 kΩ, C = 0,1 μF τ = 0,1 ms
constante de temps du dipôle RL $\tau = L/R$	R = 1 kΩ, L = 10 mH τ = 10 μs
fréquence d'oscillation d'un dipôle LC $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$	L ≈ 10 mH, C ≈ 0,1 μF f_0 ≈ 5 kHz

Le cours d'abord

■ Signaux

1. En électronique, quelle est la nature physique des signaux les plus courants ?
Quel est le plus souvent utilisé ?
Quelles sont les principales caractéristiques d'un signal ?

2. Pour un signal $u(t)$ dépendant du temps, définir sur un intervalle la moyenne, et la valeur quadratique moyenne (ou RMS ou encore efficace).
Quelle est la valeur de ces grandeurs sur une période dans le cas où le signal est sinusoïdal d'amplitude U_m ?
Si le signal est la tension aux bornes d'une résistance, à quelle grandeur physique la valeur RMS est-elle liée ?