Algèbre linéaire | 1

Compétences

On cherchera à :

▷ Savoir montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou est une base.

Exercices 1 à 5.

▷ Savoir déterminer une base ou la dimension d'un espace vectoriel.

Exercices 6, 7, 9 et 10.

▷ Savoir utiliser les définitions de noyau et d'image d'une application linéaire.

Exercices 11, 13, 15 à 17, 25, 24.

▷ Savoir déterminer la matrice d'une projection ou d'une symétrie dans une base.

Exercices 8 et 14.

▷ Savoir justifier que deux sous-espaces sont supplémentaires.

Exercices 10, 12 et 13.

▷ Savoir justifier qu'un endomorphisme est bijectif et savoir l'exploiter.

Exercices 18, 25 et 23.

▷ Savoir utiliser la notion de trace.

Exercices 18, 20 et 22.

Coup d'œil sur le chapitre

Ce chapitre reprend et prolonge les notions étudiées en première année : il aborde ainsi les familles quelconques (non nécessairement finies) de vecteurs pour en étudier le caractère libre ou générateur, et définit la notion de somme de plusieurs sous-espaces vectoriels.
Par ailleurs, de nouveaux concepts sont introduits, tant pour le point de vue vectoriel que pour le point de vue matriciel. Ainsi on définit la notion d'hyperplan en dimension finie, que l'on traduit par une condition de dimension ou par une équation dans une base ; c'est l'occasion d'éclairer sous un nouveau jour les résultats vus en première année au sujet des systèmes linéaires. On définit également les notions de projecteur et de symétrie, qui joueront un rôle très important notamment dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens.
Enfin, on commence à poser les premiers jalons du chapitre de réduction au moyen de la notion de stabilité d'un sous-espace vectoriel et de celle de matrices semblables. On met alors en place la notion de trace d'une matrice, qui est un invariant de similitude.

Le saviez-vous ?

La notion d'espace vectoriel a été introduite dans les années 1840 par les mathématiciens Arthur Cayley (1821-1895) et Hermann Grassmann (1809-1877). Le premier a défini l'addition et la multiplication par un scalaire des n-uplets de réels. Le second a fourni une théorie très confuse, incomprise de ses contemporains mais qui avait l'avantage de ne pas dépendre d'une base.
Les espaces vectoriels ont été formalisés en 1888 par Giuseppe Peano (1858-1932) et sont devenus le cadre naturel de la géométrie mais aussi de nombreux autres domaines ; on peut concevoir des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions, des polynômes ou des matrices. L'algèbre linéaire permet en effet d'utiliser l'intuition géométrique dans des théories mathématiques dépourvues de support intuitif apparent.

Énoncé des exercices

Familles de vecteurs

Exercice 1. *Base de* $\mathbb{R}_1[X]$

Soit a et b deux réels distincts. Justifier que la famille $(X-a, X-b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, puis déterminer les coordonnées du polynôme X dans cette base.

Exercice 2. *Famille de fonctions à paramètre*

Dans l'espace E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = \sin(a+x).$$

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; montrer que la famille (f_a, f_b) est libre si et seulement si $b - a \notin \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. En déduire que la famille $(\cos, \sin)$ est libre.
3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$; montrer que la famille (f_a, f_b, f_c) est liée.

Exercice 3. $(\star)$ *Formes linéaires*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Justifier l'existence d'une unique application linéaire $\varphi_k : E \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \varphi_k(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Montrer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{C})$.
3. Soit $\psi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$. Déterminer les coordonnées de ψ dans la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Exercice 4. $(\star)$ *Famille de fonctions indexée par* $\mathbb{R}$

On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$.
Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans E.

Exercice 5. *Famille orthogonale*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et f_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_p(x) = \sin(px)$.

1. Soit p et q deux entiers non nuls. Calculer $I(p,q) = \displaystyle\int_0^\pi f_p(x) f_q(x)\, \mathrm{d}x$.
2. Montrer que la famille $\big(f_p\big)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 6. *Équation cartésienne d'un plan de* $\mathbb{R}^3$

On pose $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$.

1. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$.
2. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer une équation cartésienne de F.

Exercice 7. *Commutant d'une matrice de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,;\, AM = MA\}$.

1. Justifier que Δ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de Δ.
3. Justifier que Δ est l'intersection de deux hyperplans de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Exercice 8. *Projection sur un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \,;\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \,;\, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice de p dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9. *Intersection de deux hyperplans*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère deux hyperplans H et H' de E tels que $H \neq H'$.

1. Montrer que $\dim(H + H') = n$.
2. En déduire la dimension de $H \cap H'$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_k[X]\,;\, P(0) = 0, P'(1) = 0\}$; déterminer la dimension de F.

Exercice 10. *Suite récurrente d'ordre 3*

On considère les ensembles :

$$\begin{aligned}
E &= \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,;\, \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\right\} \\
E_1 &= \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,;\, \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} + x_n = 0\right\} \\
E_2 &= \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,;\, \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\right\}
\end{aligned}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel ; on admettra que E_1 et E_2 sont également des espaces vectoriels.

2. Montrer que E_1 et E_2 sont inclus dans E.
3. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
4. Déterminer les suites appartenant à E.
5. Montrer que E est de dimension finie et calculer la dimension de E.

Applications linéaires

Exercice 11. *Noyaux et images*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ puis que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \iff \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E$.

Exercice 12. *Endomorphisme idempotent*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie ; montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 13. ($\star$) *Fonctions T-périodiques*

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On note E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et T-périodiques. Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = f'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. L'endomorphisme φ est-il injectif ?
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ f \in E\,;\ \displaystyle\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \right\}$; φ est-il surjectif ?
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans E.

D'après Oral II Banque PT

Exercice 14. *Matrice d'un projecteur et d'une symétrie*

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les espaces

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\,;\ P(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(X^2 + X).$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On note f le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
3. On note g la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer la matrice de g dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.

Exercice 15. *Rang et projecteurs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ; on considère deux endomorphismes f et g de E tels que

$$f + g = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$ puis montrer l'égalité. Que peut-on dire de $g \circ f$?
2. Montrer que f et g sont des projecteurs.

D'après Oral II Banque PT

Exercice 16. $(\star)$ *Projecteurs en relation*

Soit f et g deux projecteurs distincts d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f n'est pas l'application nulle et que

$$f \circ g - g \circ f = \lambda\, f + \mu\, g. \tag{$\star$}$$

avec $\lambda \notin \{0, 1\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(g)$, puis que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
2. En déduire que $g \circ f = f$.
3. Montrer que $\lambda + \mu = 0$.
4. Montrer que $f \circ g = g$ puis que $\lambda = -1$.

D'après Oral I Banque PT

Exercice 17. *Stabilité de noyaux et images*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par f.
2. Soit g un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont stables par g.
   b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$ est stable par g.

Calcul matriciel

Exercice 18. *Endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi(X) = X + \mathrm{Tr}(X)\, A.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, φ est bijectif.
3. Donner le rang de φ lorsque $\mathrm{Tr}(A) = -1$.
4. Retrouver directement le résultat de la question 2 lorsque $n = 2$.

D'après Oral II Banque PT

Exercice 19. *Utilisation du théorème du rang*

Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le rang des matrices A et B.
3. Montrer $BA = I_2$.

D'après Oral Mines-Télécom

Exercice 20. *Caractérisation de la trace*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui placé en i-ème ligne et en j-ème colonne, qui vaut 1.
   Soit $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$. Montrer que
   $$E_{i,j}\, E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
2. Soit φ une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs réelles, telle que
   $$\forall (A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
   Montrer que φ est proportionnelle à la trace, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi(M) = \lambda\, \mathrm{Tr}(M).$$

Exercice 21. ($\star$) *Endomorphisme de trace nulle*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Tr}(f) = 0$.

1. Montrer que $f \circ f$ est une homothétie. On note λ son rapport.
2. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 0$.
   a) Montrer qu'il existe un complexe α et une symétrie s de $\mathbb{C}^2$ tels que $f = \alpha\, s$.
   b) Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.
3. On suppose maintenant que $\lambda = 0$ et que $f \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après Oral II Banque PT

Exercice 22. *Matrices semblables*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$, de rang n, tel que $f^2 = 0$; on note A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que A soit semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. En déduire la trace de f.

Exercices de synthèse

Exercice 23. *Interpolation de Lagrange*

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1. On considère l'application φ définie pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par
$$\varphi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n)).$$
Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. En déduire que, pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.
3. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.
   a) Montrer que pour tout $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$ avec $k \neq i$, $L_i(a_k) = 0$ et $L_i(a_i) = 1$.
   b) En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   c) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.
   d) Retrouver le résultat de la question 2.

Exercice 24. $(\star)$ *Indice d'un endomorphisme*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, f un endomorphisme de E. Pour tout entier p, on pose $u_p = \dim\big(\mathrm{Ker}(f^p)\big)$.

1. Montrer qu'il existe un entier k tel que $u_{k+1} = u_k$.
2. On désigne par r le plus petit entier vérifiant $u_{r+1} = u_r$. Cet entier est appelé *l'indice* de l'endomorphisme f.
   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.
   b) Montrer que pour tout $p \geqslant r$, on a $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.
   c) Établir que r est le plus petit entier vérifiant $\mathrm{Im}(f^{r+1}) = \mathrm{Im}(f^r)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^r)$ et $\mathrm{Ker}(f^r)$ sont supplémentaires dans E.