Avant-propos

Galilée, quand on lui demandait à quoi servaient les mathématiques, répondait qu'elles servaient principalement à peser, à mesurer et à compter : à peser les ignorants, à mesurer les sots, et à compter les uns et les autres.

La politique française est complexe et ses péripéties récentes ne peuvent être comprises sans l'éclairage satirique des mathématiques.

Nous trouvons dans le comportement des hommes et des femmes politiques matière à calculer des probabilités, établir des statistiques, tracer des figures géométriques, étudier des suites, résoudre des équations et des problèmes de logique.

Nous allons tester, avec ce livre, l'hypothèse H_0 :

« nous sommes encore en démocratie »,

contre l'hypothèse H_1 :

« nous sommes déjà dans une république bananière »,

avec le risque de déplaire à certains et d'amuser les autres.

Gérard Frugier

Rappels

Factorielle : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$

Coefficients binomiaux : $\binom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Probabilité conditionnelle : $P_A(B) = P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Les notations utilisées dans ce livre sont $\binom{n}{p}$ et $P_A(B)$.

1 □

« Quand on a du caractère, il est toujours mauvais. »
(G. Clemenceau)

Chaque semaine, la probabilité d'avoir une nouvelle démission dans l'équipe de la garde des Sceaux est égale à p ($p>0$). Son cabinet initial se compose de r collaborateurs. On note X le nombre de semaines avant qu'elle ne se retrouve seule.

Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.

(Pour des raisons médiatiques, il n'y a pas plus d'une démission par semaine.)

▶

Soit A_i l'événement : « la i^e démission n'a pas lieu ».
L'événement A_1 a pour probabilité $P(A_1)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-p)^n=0$.
Supposons que $P(A_{i-1})=0$ $(1<i<r)$.
L'événement A_i a pour probabilité :
$P(A_i)=P(A_{i-1})P_{A_{i-1}}(A_i)+P(\overline{A}_{i-1})P_{\overline{A}_{i-1}}(A_i)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-p)^n=0.$
Ainsi, par récurrence, on a montré que tous les événements A_1, …, A_r ont une probabilité nulle.

L'événement « elle ne se retrouve jamais seule » est donc quasiment impossible.
X est bien une variable aléatoire, $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

Elle se retrouve seule la k^e semaine lorsqu'il y a eu $(r-1)$ démissions durant les $(k-2)$ premières semaines et une la semaine précédente.
Il y a $\binom{k-2}{r-1}$ répartitions différentes de ces démissions.
Chaque répartition a pour probabilité $p^r(1-p)^{k-r-1}$
Donc : $P(X=k)=\binom{k-2}{r-1}p^r(1-p)^{k-r-1}$ pour $k>r$

$X-1$ suit la loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$.

$$E(X)=1+\frac{r}{p} \qquad \sigma(X)=\frac{\sqrt{r(1-p)}}{p}$$

2 □

Trois agents de la police des frontières qui reconduisent des sans-papiers expulsés bénéficient du statut Gold des hommes d'affaires. Ils ont chacun une carte Flying Blue, carte de fidélité qu'ils remplissent à l'occasion des reconduites. À chaque voyage, la compagnie aérienne reporte des miles gratuits sur la carte Flying Blue de l'un d'entre eux pris au hasard.
Au bout de n voyages d'expulsion, on note X le nombre de cartes Flying Blue vides.

Calculer $E(X)$.

Déterminer la loi de probabilité de X.

▶

Dénombrer les cartes vides revient à attribuer la valeur 1 aux cartes vides et 0 aux cartes pleines, puis à faire la somme de ces nombres. On définit ainsi trois variables aléatoires de Bernoulli S_1, S_2 et S_3 dont la somme donne la variable aléatoire X. L'espérance mathématique de X est la somme des espérances des variables S_1, S_2 et S_3 :

$$E(X)=E(S_1)+E(S_2)+E(S_3)$$

La variable S_1 prend les valeurs 0 ou 1, donc $E(S_1)=P(S_1=1)$. On calcule la probabilité $p_1=P(S_1=1)$. Ω est l'ensemble des applications de n voyages dans trois cartes. Il y en a 3^n.
L'événement $(S_1=1)$ correspond aux applications de n voyages dans les deux autres cartes. Il y en a 2^n. Tous ces événements élémentaires ayant la même probabilité, on en déduit :

$$p_1=P(S_1=1)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On obtient le même résultat avec les deux autres cartes :

$$P(S_1=1)=P(S_2=1)=P(S_3=1)=\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad E(X)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

La variable X prend les valeurs 0, 1 et 2, lorsque $n>0$. (Si n est nul, la variable aléatoire X est évidemment toujours nulle.)
$\{X=2\}$: tous les voyages sont dans la même carte. Il y a trois applications correspondantes. On en déduit :

$$P(X=2)=\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$$

$\{X=1\}$: tous les voyages sont dans deux cartes. On dénombre les applications surjectives de n voyages sur 2 cartes. Il y en a $3\times(2^n-2)$ (3 choix de 2 cartes et pour chaque choix, on retire les 2 applications de n voyages dans une seule carte).
En utilisant $P(X=0)=1-(P(X=1)+P(X=2))$, on en déduit :

$$P(X=1)=\frac{2^n-2}{3^{n-1}} \qquad P(X=0)=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}$$

3 □

Nicolas est kleptomane. Quand il rencontre Angela, il lui subtilise soit son stylo, soit sa montre, avec la même probabilité.
Angela dispose de n montres et n stylos. On note X_n le nombre de jours où elle possèdera encore au moins une montre et un stylo.

Établir la loi de probabilité de X_n. Calculer $E(X_n)$.

▶

X_n est la somme du nombre de montres volées et du nombre de stylos volés. Elle épuise sa réserve en perdant soit n montres et moins de n stylos, soit n stylos et moins de n montres. Les deux événements ont la même probabilité. Soit A_i = « elle a perdu i stylos lorsqu'elle perd la n^e montre ». A_i est réalisé lorsqu'elle a passé $(n+i-1)$ jours en perdant i stylos, suivis d'un jour où elle perd la dernière montre. Il y a $\binom{n+i-1}{n-1}$ éventualités.
Par équiprobabilité :

$$P(A_i)=\binom{n+i-1}{n-1}\frac{1}{2^{n+i}} \qquad P(X_n=n+i)=2P(A_i)=\binom{n+i-1}{n-1}\frac{1}{2^{n+i-1}}$$

$$\forall k\in [\![n,2n-1]\!],\ P(X_n=k)=\binom{k-1}{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$E(X_n)=\sum_{k=n}^{k=2n-1} k\binom{k-1}{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}=2n\sum_{k=n}^{k=2n-1}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}=2n\sum_{k=n}^{k=2n-1}P(X_{n+1}=k+1)$$

Ce qui donne $$E(X_n)=2n\left(1-\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

4 □

Rachida a stocké n sticks rouges et n sticks noirs dans un seau. Elle les sort un par un au hasard jusqu'à obtenir tous les sticks noirs. On note X le nombre de sticks rouges restants.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance.

(On parle de bâtons de rouge à lèvres et non pas de badines pour le dressage des collaborateurs.)

►

Ω est l'ensembles des listes de $2n$ sticks.

$$card(\Omega)=\binom{2n}{n} \qquad X(\Omega)=[\![0,n]\!]$$

$\{X=k\}$ est constitué par les listes ayant $(n-1)$ sticks noirs parmi les $(2n-k-1)$ premières places et un noir à la $(2n-k)^e$.

$$card(X=k)=\binom{2n-k-1}{n-1} \qquad P(X=k)=\frac{\binom{2n-k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{k=n} kP(X=k)=\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{2n-k-1}{n-1}$$

$$=\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{i=n}^{i=2n}(2n-i)\binom{i-1}{n-1}=\frac{n}{\binom{2n}{n}}\left(2\sum_{i=n}^{i=2n}\binom{i-1}{n-1}-\sum_{i=n}^{i=2n}\binom{i}{n}\right)$$

$$=\frac{n}{\binom{2n}{n}}\left(2\sum_{j=n-1}^{j=2n-1}\binom{j}{n-1}-\sum_{i=n}^{i=2n}\binom{i}{n}\right)=\frac{n}{\binom{2n}{n}}\left(2\binom{2n}{n}-\binom{2n+1}{n+1}\right)$$

$$E(X)=2n-\frac{n(2n+1)}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

On a utilisé la relation de Pascal : $\displaystyle\sum_{i=n}^{i=m}\binom{i}{n}=\binom{m+1}{n+1}$

5 □

Les dénonciations anonymes de patrons voleurs ne doivent plus être prises en compte, mais les dénonciations anonymes de sans-papiers sont bienvenues. Brice dispose de n dénonciations anonymes dont deux concernent des patrons voleurs. Il les prend une par une au hasard pour les lire. On note X le rang de la première dénonciation de patrons voleurs.

Établir la loi de probabilité de X, calculer $E(X)$.

On note Y le rang de la deuxième dénonciation de patrons voleurs.

Déterminer la loi de Y, calculer $E(Y)$.

▶

Il ya n dénonciations dont deux de patrons voleurs. La probabilité d'avoir une dénonciation de patrons voleurs au rang 1 est donc $P(X=1) = p_1 = \frac{2}{n}$. La probabilité d'avoir la première dénonciation de patrons voleurs au rang 2 est égale au produit de la probabilité de choisir une des (n-2) dénonciations de sans-papiers parmi les n dénonciations par la probabilité de tomber sur un des deux dénonciations de patrons voleurs parmi les (n-1) restantes.

$$P(X=2) = p_2 = \frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n-1}$$

La probabilité d'avoir la première dénonciation de patrons voleurs au rang k est égale au produit de la probabilité de prendre (k-1) dénonciations de sans-papiers dans les n dénonciations par la probabilité de prendre une dénonciation de patrons voleurs dans les (n-k+1) dénonciations restantes :

$$P(X=k) = p_k = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{k=n} k - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n+1}{3}$$

Rappel : $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On peut ramener par une considération de symétrie l'étude de la variable Y à celle de la variable X. En prenant l'ordre inverse de la liste des dénonciations, la deuxième dénonciation de patrons voleurs devient la première.

La probabilité pour qu'elle soit lue au rang k est égale à la probabilité d'être la première dénonciation de patrons voleurs, avec le rang (n-k+1), dans l'ordre inverse :

$$P(Y=k)=P(X=n-k+1)=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

$$E(Y) = E(n+1-X)=n+1-E(X)=n+1-\frac{n+1}{3}=\frac{2(n+1)}{3}$$

6 □

Nicolas envisage de délocaliser le ministère de l'Intérieur en Chine. Pour tester cette idée libérale, certains policiers qui protègent la flamme olympique reçoivent leurs ordres de l'ambassade de Chine. Ainsi, un manifestant qui agite un drapeau tibétain devant un policier a la probabilité p de voir son drapeau arraché. Il dispose de k drapeaux.

Calculer la probabilité pour qu'il agite ses drapeaux devant n policiers avant d'épuiser son stock.

▶

Notons A_n l'événement « il agite ses drapeaux devant n policiers avant d'épuiser son stock ».

S'il se retrouve sans drapeau devant le $(n+1)^e$ policier, c'est qu'il y a eu (k-1) policiers parmi les (n-1) premiers qui ont arraché les (k-1) premiers drapeaux et que le policier précédent lui a arraché le dernier.

Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ répartitions différentes de ces policiers.

Chaque répartition a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$

Donc : $P(A_n)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$ *pour* $n \geqslant k > 0$

7 □

Roselyne a mélangé dans un même bocal la même quantité n d'olives vertes et d'olives noires. En regardant les J.O. sur son écran plasma, elle les mange une par une au hasard.

Soit X le nombre d'olives qui restent lorsqu'elle a épuisé une couleur.

Établir la loi de probabilité de X.

▶

Soit $k \leqslant n$. Si $X=k$, Roselyne a pris $(2n-k)$ olives. Soit Y le nombre d'olives noires prises dans les $(2n-k-1)$ premiers tirages. Y suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}\left(2n, 2n-k-1, \frac{1}{2}\right)$.

$$P(Y=h)=\frac{\binom{n}{h}\binom{n}{2n-k-1-h}}{\binom{2n}{2n-k-1}}$$

Soit Z la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la $(2n-k)^{e}$ olive est noire et la valeur 0 si elle est verte.

L'événement $\{X=k\}$ est la réunion des événements incompatibles suivants : $\{Y=n-k \text{ et } Z=0\}$ et $\{Y=n-1 \text{ et } Z=1\}$

$$\begin{aligned}P(X=k)&=P(Y=n-k \text{ et } Z=0)+P(Y=n-1 \text{ et } Z=1)\\&=P_{\{Y=n-k\}}(Z=0)P(Y=n-k)+P_{\{Y=n-1\}}(Z=1)P(Y=n-1)\end{aligned}$$

$$P(Y=n-1)=P(Y=n-k)=\frac{\binom{n}{n-k}\binom{n}{n-1}}{\binom{2n}{2n-k-1}}=\frac{n\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{2n-k-1}}$$

$$P_{\{Y=n-k\}}(Z=0)=P_{\{Y=n-1\}}(Z=1)=\frac{1}{k+1}$$

On en déduit :

$$P(X=k)=\frac{2n}{k+1}\frac{\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{2n-k-1}}$$

8 □

Pour motiver les élèves, les bons points ont été réintroduits à l'école. Pour dix bons points, on obtient en échange une photo de Nicolas et pour deux photos de Nicolas, on a un poster de Carlita.

Le nombre de photos de Nicolas que Xavier obtient en une année suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Dès qu'il a deux photos de Nicolas, Xavier les échange.

On note X le nombre de photos de Nicolas qu'il lui reste à la fin de l'année.

Établir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

Calculer $V\left(X-\frac{1}{2}\right)$. En déduire $V(X)$.

▶

Soit Y le nombre de photos de Nicolas.

$$P(X=0)=\sum_{p=0}^{+\infty} P(Y=2p)=\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}=e^{-\lambda}ch\lambda=\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$$

$$P(X=1)=\sum_{p=0}^{+\infty} P(Y=2p+1)=\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}=e^{-\lambda}sh\lambda=\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$$

$$E(X)=P(X=1)=\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$$

$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2$ *est une variable aléatoire constante, égale à* $\frac{1}{4}$.

On a donc :

$$V\left(X-\frac{1}{2}\right)=E\left(\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(E\left(X-\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{-e^{-2\lambda}}{2}\right)^2=\frac{1-e^{-4\lambda}}{4}$$

$$V(X)=V\left(X-\frac{1}{2}\right)=\frac{1-e^{-4\lambda}}{4}$$

9 □

Doc Bernard, le ministre de l'Ingérence Humanitaire, boycotte le riz dans les restos chinois pour soutenir le Tibet : il le remplace par du caviar. Pour ne pas froisser les dirigeants chinois, il continue de manger avec des baguettes. Le nombre de grains de caviar qu'il attrape entre ses baguettes suit une loi de Poisson. Avec du belouga, il n'attrape rien deux fois sur trois. Avec du sevrouga, il n'attrape rien deux fois sur cinq.
Il prend trois fois sur cinq du belouga.

Sachant qu'il a attrapé deux grains de caviar, calculer la probabilité pour que ce soit du belouga.

▶

Soit X le nombre de grains qu'il attrape quand il mange du belouga et Y le nombre de grains qu'il attrape quand il mange du sevrouga. X suit la loi de Poisson de paramètre λ, Y suit la loi de Poisson de paramètre μ.

$P(X=0)=e^{-\lambda}=\frac{2}{3}$, *donc* $\lambda=-ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

$P(Y=0)=e^{-\mu}=\frac{2}{5}$, *donc* $\mu=-ln\left(\frac{2}{5}\right)$.

$P(X=2)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}=\frac{2\lambda^2}{3\times 2!}=\frac{\lambda^2}{3}$ $\qquad P(Y=2)=e^{-\mu}\frac{\mu^2}{2!}=\frac{2\mu^2}{5\times 2!}=\frac{\mu^2}{5}$

Soient A l'événement « il a pris du belouga » et B l'événement « il a attrapé deux grains ». On a : $P(A)=0,6 \quad P(\overline{A})=0,4$

$P_A(B)=P(X=2)=\frac{2\lambda^2}{3\times 2!} \quad P_{\overline{A}}(B)=P(Y=2)=\frac{2\mu^2}{5\times 2!}$.

On cherche $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=0,6\times\frac{\lambda^2}{3}$.

La formule des probabilités totales donne :

$P(B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)=0,6\times\frac{\lambda^2}{3}+0,4\times\frac{\mu^2}{5}$.

Après simplification, on obtient :

$$P_B(A) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 0{,}4\mu^2} \approx 0{,}3286$$

10 □

Pour cacher sa mauvaise haleine à Nicolas, Xavier suce des cachous qu'il prend dans une des deux boîtes glissées dans chacune des deux poches de sa veste. Il les saisit un par un, dans une poche prise au hasard à chaque cachou. Chaque boîte contient n cachous.

On appelle X le nombre de cachous encore présents dans une boîte lorsque qu'il s'aperçoit que l'autre est vide.

Déterminer la loi de probabilité de X.

▶

Il s'aperçoit qu'une boîte est vide lorsqu'il veut y prendre un cachou. À ce moment-là, il a sucé n cachous d'une boîte et (n-k) de l'autre. k est alors la valeur prise par la variable aléatoire X.

Calcul de la probabilité $P(X=k)$:

Il a sucé (2n-k) cachous, c'est une suite de (2n-k) alternatives indépendantes : prendre chaque cachou dans une des deux poches avec la même probabilité 0,5.

La probabilité d'avoir sucé (2n-k) cachous dans un ordre donné puis de vouloir en prendre un dans une poche donnée est donc $p = 0{,}5^{2n-k+1}$

Il y a $\binom{2n-k}{n}$ façons d'avoir la poche gauche vide après avoir sucé (2n-k) cachous.

On a le même résultat pour la poche droite.

Ces deux événements sont incompatibles, par conséquent :

$$P(X=k) = 2 \times \binom{2n-k}{n} \times 0{,}5^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n} \times 0{,}5^{2n-k}$$

11 ☐

« Je ne sais pas le faire du tout. Comment faites-vous ? Montrez-moi ! » (X. Darcos[1])

La règle de trois eut lieu.

Après qu'il eut été ministre, Xavier fut parachuté inspecteur des classes de CE1. Quand il inspectait une classe, il assistait à une séance sur la règle de trois avec la probabilité p. Dans ce cas, il y avait toujours un élève pour remarquer son ignorance. On note X le nombre de classes inspectées avant d'atterrir dans une leçon sur la règle de trois pour la n^e fois.

Déterminer la loi de probabilité de X.

▶

Soit A_i l'événement : « la i^e règle de trois n'a pas lieu ».
L'événement A_1 a pour probabilité $P(A_1) = \lim\limits_{n\to\infty} (1-p)^n = 0$.
Supposons que $P(A_{i-1}) = 0 \qquad (1 < i < n)$.
L'événement A_i a pour probabilité :

$$P(A_i) = P(A_{i-1})P_{A_{i-1}}(A_i) + P(\overline{A}_{i-1})P_{\overline{A}_{i-1}}(A_i) = P_{\overline{A}_{i-1}}(A_i),$$

$$P(A_i) = P_{\overline{A}_{i-1}}(A_i) = \lim_{n\to\infty} (1-p)^n = 0.$$

Ainsi, par récurrence, on a montré que tous les événements A_1, …, A_n ont une probabilité nulle : l'événement « la n^e règle de trois n'a pas lieu » est quasiment impossible.

Si la n^e règle de trois a lieu dans la k^e classe, c'est qu'il y a eu $(n-1)$ règles de trois dans les $(k-1)$ premières classes.
Il y a $\binom{k-1}{n-1}$ répartitions différentes de ces règles de trois.
Chaque répartition a pour probabilité $p^n(1-p)^{k-n}$
Donc : $P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n(1-p)^{k-n} \qquad$ pour $k \geqslant n$

X suit la loi de Pascal $\mathcal{P}(n,p)$.

1. Canal+ le 3 avril 2008, le ministre de l'éducation, sèche sur : « Sachant que 4 stylos valent 2,42 €, combien valent 14 stylos ? »

12 □

Madame organise des dîners mondains où elle invite cinq personnalités prises dans une liste de onze V.I.P. Elle a pour règle de ne pas inviter deux fois le même groupe de personnes et de respecter les contraintes que lui imposent les amitiés et inimitiés de ses convives. Sa première liste comporte Nicolas et Cécilia qui ne peuvent pas être invités ensemble.
Combien de dîners peut-elle organiser ?

Sa deuxième liste comporte Nicolas et Carlita qui ne peuvent être invités qu'ensemble.
Combien de dîners peut-elle organiser ?

Sa troisième liste comporte Nicolas, Carlita, Mamadou et Brice. Nicolas et Carlita ne peuvent être invités qu'ensemble. Mamadou est sans-papiers et ne peut pas être invité avec Brice ou Nicolas.
Combien de dîners peut-elle organiser ?

▶

Pour la première liste, il y a trois types de dîners :
avec Nicolas, il reste 4 personnes à prendre parmi 9,
donc $\binom{9}{4}=126$ *possibilités, avec Cécilia,* $\binom{9}{4}=126$ *possibilités,*
sans Nicolas et sans Cécilia, $\binom{9}{5}=126$ *possibilités.*
Il y a en tout $3\times126=378$ *dîners possibles.*
Pour la deuxième liste, il y a deux types de dîners :
avec Nicolas et Carlita, $\binom{9}{3}=84$ *possibilités,*
sans Nicolas et sans Carlita, $\binom{9}{5}=126$ *possibilités.*
Il y a en tout $84+126=210$ *dîners possibles.*
Pour la troisième liste, il y a trois types de dîners :
avec Brice, Nicolas et Carlita, $\binom{7}{2}=21$ *possibilités,*