Mines/Ponts — Problème de transport de Monge
Filière MP 2005
Épreuve 1

Avertissement : dans ce problème apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorsque ce n'est pas explicitement demandé.

Pour une suite de réels $z = (z_n)_{n\geqslant 1}$, on note $\liminf_n z_n$ (respectivement $\limsup_n z_n$), la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs d'adhérence de z.
On rappelle qu'une suite converge si, et seulement si, elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence finie.
Pour une suite de fonctions à valeurs réelles $(f_n(x)_{n\geqslant 1}$, on note $\liminf_n f_n$ la fonction qui à tout réel x associe $\liminf_n f_n(x)$.

I. Calculs préliminaires

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x : $0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{\rho}\exp\left[\left(\dfrac{1}{2}-\rho\right)x^2\right]$. (A)
On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0.

1) Soit F_f définie par $F_f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)e^{-u^2/2}du.$

En particulier $F_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$

Montrer que F_f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

2) Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$

3) Montrer que φ est monotone et est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x, calculer $\ln(\varphi'(x)) + \ln\big(f(\varphi(x))\big) - \dfrac{1}{2}\big(\varphi(x)\big)^2$

et $\ln\left[(\varphi^{-1})'(x)\right] - \ln\big(f(x)\big) - \dfrac{1}{2}\big(\varphi^{-1}(x)\big)^2.$

5) Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

Montrer l'identité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\varphi(u)\big)e^{-u^2/2}du$

6) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geqslant A$,

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}du \geqslant \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}.$$

7) Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geqslant B$,

$$|\varphi(u)| \leqslant e^{(|u|+1)^2/4}.$$

8) Déterminer une primitive de la fonction :

$$u \mapsto \big(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\big)e^{-u^2/2}.$$

9) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\big)e^{-u^2/2}du.$

II. Une inégalité intéressante

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln\big(f(u)\big)e^{-u^2/2}du,$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}du.$$

10) Justifier la convergence de ces deux intégrales.

11) Montrer l'identité : $E(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\big(f(\varphi(u))\big)e^{-u^2/2}du$

12) Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))\big)e^{-u^2/2}du \qquad (1)$$

13) Quelle est la relation d'ordre entre $E(f)$ et $\Phi(f)$?

14) Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

III. Extension aux fonctions positives

On veut maintenant étendre le résultat de la question 13 aux fonctions qui peuvent s'annuler. On considère donc une fonction continue positive g qui satisfait les mêmes hypothèses que f, à la différence près que g peut s'annuler. Soit la fonction définie par $\psi(x) = x\ln(x)$, on convient que ψ est prolongée par continuité en 0 par $\psi(0) = 0$.

Pour tout entier $n > 0$, on pose $f_n(u) = \dfrac{n-1}{n} g(u) + \dfrac{1}{n}\cdot$

15) Montrer que $(E(f_n))_{n \geqslant 1}$ converge vers $E(g)$ quand n tend vers l'infini.

16) Soit φ_n la fonction associée à f, comme φ était associée à f dans la question 2. Pour tout réel x, on note $\psi_1(x) = \lim\,\inf_n \varphi_n(x)$ et $\psi_2(x) = \lim\,\sup_n \varphi_n(x)$.

Montrer que pour tout réel x et pour $j = 1$ et $j = 2$:

$$\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \qquad (2).$$

17) On note respectivement a et b les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des x tels que $g(x) > 0$:

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0\} \ \text{ et } \ b = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0\}\cdot$$

Lorsque g est strictement positive au voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$), on obtient $a = -\infty$ (respectivement $b = +\infty$) de sorte que

$$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty \text{ et que } g = 0 \text{ sur }]-\infty, a] \cup [b, +\infty[.$$

Montrer que pour $j = 1$ et $j = 2$, ψ_j est strictement croissante et

$$\lim_{x \to -\infty} \psi_j(x) = a \ \text{ et } \ \lim_{x \to +\infty} \psi_j(x) = b$$

18) On note D l'ensemble des points de discontinuité de ψ_1. Pour x élément de D, on note $\psi_1(x^+) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} \psi_1(y)$ et $\psi_1(x^-) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y < x}} \psi_1(y)$.

Pour $\varepsilon > 0$, soit $D_\varepsilon = \{x \in D \mid \psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > \varepsilon\}\cdot$

On fixe N entier non nul, montrer que le cardinal de $D_{1/N}$ est inférieur à $N(b - a)$.

19) Que peut-on dire du cardinal de D ?

20) Montrer que si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ alors g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$.

21) Montrer que si $g(\psi_1(x)) > 0$ alors ψ_1 est continue en x.

22) Montrer que si ψ_1 est continue en x alors $\psi_1(x) = \psi_2(x)$.

23) Notons C l'ensemble des points de continuité de ψ_1 et K une partie compacte de C. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe dans K des réels $x_0, \ldots, x_{2q+1}$ tels que :

(a) $K \subset \displaystyle\bigcup_{j=0}^{q} [x_{2j}, x_{2j+1}]$,

(b) pour $j \in \{0, \ldots, q\}$, $x_{2j} < x_{2j+1}$ et $\psi_1(v) - \psi_1(u) \leqslant \varepsilon$ quels que soient u et v tels que $x_{2j} \leqslant u < v \leqslant x_{2j+1}$.

24) Déduire des questions 20 à 23 que $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur K, vers ψ_1.

25) Montrer qu'il existe A et n assez grands tels que pour tout $m \geqslant n$, on ait : $\sup\limits_{u \in [-A, A]|} \varphi_m(u)| \leqslant |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1$.

En déduire que : $\sup\{|u-\varphi_n(u)|^2/\ |u|\leqslant A, n\geqslant 1\}$ est fini. On note M ce nombre.

26) Montrer que pour tout $A>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-A}^{A}|u-\varphi_n(u)|^2e^{-u^2/2}du=\int_{-A}^{A}|u-\psi_1(u)|^2e^{-u^2/2}du.$$

Indication : Soit $\varepsilon>0$ fixé. Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des points de discontinuité de ψ_1 dans $[-A,A]$. Pour tout entier p non nul, introduisons

$$J_p=\left]\lambda_p-2^{-p}\frac{\varepsilon}{M},\lambda_p+2^{-p}\frac{\varepsilon}{M}\right[\quad\text{et}\quad K=[-A,A]\setminus\bigcup_{p\geqslant 1}J_p.$$

On majorera séparément les intégrales sur K et sur $\displaystyle\bigcup_{p\geqslant 1}J_p$.

27) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Le problème de transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas unidimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u-du$ et $u+du$ est donnée par $2exp(-u^2/2)du$. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique $f(u)exp(-u^2/2)$. Cela est représenté par une application s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui pour tout réel u donne l'abscisse, $s(u)$, du grain situé en u après le transport. On montre que l'application y déterminée en question 2 minimise le coût du transport défini par $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|u-s(u)|^2e^{-u^2/2}du$, parmi toutes les fonctions s possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de f et qui ne nécessite pas le calcul de φ. Le nombre E(f) est appelée l'entropie de Boltzmann.

Connaissances utiles

- Calcul différentiel.
- Intégrales sur un intervalle.

Solution

Partie I

1) Comme $f\in H_0$, elle est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc F_f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}, F_f(x)=F_f(0)+\displaystyle\int_0^x\alpha(u)du$ où $\alpha(u)=f(u)e^{-u^2/2}$.

La fonction α étant continue sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$, sa primitive qui s'annule en 0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme $F_f(0)$ est une constante réelle, F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F_f'(x)=\alpha(x)=f(x)e^{-x^2/2}$.

La fonction f étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en est de même de F_f'. Il s'ensuit que F_f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$F_f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\sqrt{2\pi}$ et $F_f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$. Comme F_f est continue, strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$, elle établit un homéomorphisme entre les deux intervalles ouverts $]-\infty,+\infty[$ et $]0,\sqrt{2\pi}[$. Comme F_f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'après la caractérisation (du cours) des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes, F_f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $]-\infty,+\infty[$ sur $\left]0,\sqrt{2\pi}\right[$.

2) et 3) F_f^{-1} est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $\left]0,\sqrt{2\pi}\right[$ sur $]-\infty,+\infty[$. Par composition, $\varphi=F_f^{-1}\circ F_1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Comme $\varphi=F_f^{-1}\circ F_1 \iff F_f\circ\varphi=F_1$, il existe une unique $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $F_f\circ\varphi=F_1$. De plus φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Par dérivation de $F_f\circ\varphi=F_1$, on obtient : $\forall x\in\mathbb{R},\varphi'(x)F_f'(\varphi(x))=e^{-x^2/2}$
i.e. $\forall x\in\mathbb{R},\varphi'(x)f(\varphi(x))e^{-\varphi^2(x)/2}=e^{-x^2/2}\qquad(\star)$.
Comme f et φ' sont à valeurs strictement positives, on déduit de $(\star)$
$\forall x\in\mathbb{R},\ln\left[\varphi'(x)\right]+(\ln\circ f\circ\varphi)(x)-\dfrac{\varphi^2(x)}{2}=-\dfrac{x^2}{2}\cdot$
D'autre part, $F_f\circ\varphi=F_1\Rightarrow F_f=F_1\circ\varphi^{-1}$ qui, par dérivation donne :
$\forall x\in\mathbb{R},f(x)e^{-x^2/2}=(\varphi^{-1})'(x)e^{-(\varphi^{-1}(x))^2/2}\qquad(\star\star)$.
Comme f et $(\varphi^{-1})'$ sont à valeurs strictement positives, on déduit de $(\star\star)$:
$\forall x\in\mathbb{R},\ln\left[f(x)\right]-\dfrac{x^2}{2}=\ln\left[(\varphi^{-1})'(x)\right]-\dfrac{(\varphi^{-1}(x))^2}{2}\cdot$
i.e. $\forall x\in\mathbb{R},\ln\left[(\varphi^{-1})'(x)\right]-\ln\left[f(x)\right]-\dfrac{(\varphi^{-1}(x))^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}\cdot$

5) $h.\alpha:u\mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}h.\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)f(u)e^{-u^2/2}du$ existe.
φ étant un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, effectuons le changement de variable $u=\varphi(x)$. D'après $(\star)$, on a :
$h(u)f(u)e^{-u^2/2}du=h\big(\varphi(x)\big)f\big(\varphi(x)\big)e^{-\varphi^2(x)/2}\varphi'(x)dx=h\big(\varphi(x)\big)e^{-x^2/2}dx$.
Comme $\varphi(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et $\varphi(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$, on a l'identité demandée.

6) Comme $\varphi(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, il existe $A>0$ tel que $\forall x\geqslant A,\varphi(x)\geqslant 0$.
φ étant croissante, on a : $\forall x\geqslant A,\forall u\in[x,x+1],\varphi^2(u)\geqslant\varphi^2(x)\geqslant 0$.

$u \mapsto e^{-u^2/2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\forall u \in [x, x+1], e^{-u^2/2} \geqslant e^{-(x+1)^2/2} > 0$.
Donc : $\forall x \geqslant A, \forall u \in [x, x+1], \varphi^2(u)e^{-u^2/2} \geqslant e^{-(x+1)^2/2}\varphi^2(x)$.
L'inégalité demandée découle alors de l'inégalité de la moyenne.

7) Prenons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto u^2$. On a alors $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et
$\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leqslant h(u)f(u)e^{-u^2/2} \leqslant u^2 \dfrac{1}{\rho} e^{\left(\frac{1}{2}-\rho\right)u^2} e^{-u^2/2} = \dfrac{u^2}{\rho} e^{-\rho u^2}$.
Par croissances comparées, $\dfrac{u^2}{\rho} e^{-\rho u^2} \underset{|u| \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)\cdot$ Donc la fonction définie par $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après I.5. il en est de même de la fonction $u \mapsto \left(\varphi(u)\right)^2 e^{-u^2/2}$. Donc $\displaystyle\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}du \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
D'après I.6. $e^{-(x+1)^2/2}\varphi^2(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par encadrement.

Donc $\exists B_0 \in \mathbb{R}_+^\star, \forall x \geqslant B_0, |\varphi(x)| \leqslant e^{(x+1)^2/4}$.
Procédons comme en 6.
Comme $\varphi(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, il existe $A_1 < 0$ tel que $\forall x \leqslant A_1, \varphi(x) \leqslant 0$.
φ étant croissante, on a : $\forall x \leqslant A_1, \forall u \in [x-1, x], \varphi^2(u) \geqslant \varphi^2(x) \geqslant 0$.
$u \mapsto e^{-u^2/2}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_-$, $\forall u \in [x-1, x], e^{-u^2/2} \geqslant e^{-(x-1)^2/2} > 0$.
Donc : $\forall x \leqslant A_1, \forall u \in [x-1, x], \varphi^2(u)e^{-u^2/2} \geqslant e^{-(x-1)^2/2}\varphi^2(x)$.
Donc $\exists A_1 < 0, \forall x \leqslant A_1, \displaystyle\int_{x-1}^{x} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}du \geqslant e^{-(x-1)^2/2}\varphi^2(x)$.
Par encadrement, $e^{-(x-1)^2/2}\varphi^2(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.
Donc $\exists B_1 > 0, \forall x \leqslant -B_1, |\varphi(x)| \leqslant e^{(x-1)^2/4} = e^{(|x|+1)^2/4}$.
Soit $B = \max(B_0, B_1)$. Pour $|u| \geqslant B$, on a $|\varphi(u)| \leqslant e^{(|x|+1)^2/4}$.

8) On remarque que $\dfrac{d}{du}\Big[(u - \varphi(u))e^{-u^2/2}\Big] = \Big(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\Big)e^{-u^2/2}$.
Donc $u \mapsto (u - \varphi(u))e^{-u^2/2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$u \mapsto \Big(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\Big)e^{-u^2/2}$.

9) $ue^{-u^2/2} \xrightarrow[|u| \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées.
Si $|u| \geqslant B$, on a : $|\varphi(u)|e^{-u^2/2} \leqslant e^{\theta(u)}$ où $\theta(u) = -\dfrac{u^2}{4} + \dfrac{|u|}{2} + \dfrac{1}{4}\cdot$
Donc $\theta(u) \xrightarrow[|u| \to +\infty]{} -\infty$. Par suite $|\varphi(u)|e^{-u^2/2} \xrightarrow[|u| \to +\infty]{} 0$.
On déduit des limites précédentes que l'intégrale est nulle.

Partie II

10) Les fonctions $u \mapsto f(u)\ln\big(f(u)\big)e^{-u^2/2}$ et $u \mapsto (u-\varphi(u))^2e^{-u^2/2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Si $f(u) \geqslant 1$, on déduit de (A) que :

$0 \leqslant f(u)\ln\big(f(u)\big)e^{-u^2/2} \leqslant \dfrac{1}{\rho}\Big[\Big(\dfrac{1}{2}-\rho\Big)u^2 - \ln(\rho)\Big]e^{-\rho u^2} = \beta(u).$

avec $\beta(u) \underset{|u|\to+\infty}{=} o\big(u^{-2}\big)$ par croissances comparées.

• Si $0 < f(x) < 1$ comme la fonction $\psi : t \mapsto \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur le segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, elle y est bornée. On peut donc écrire :

$f(u)\ln\big(f(u)\big)e^{-u^2/2} = \psi(f(u))e^{-u^2/2} \underset{|u|\to+\infty}{=} O(e^{-u^2/2}) \underset{|u|\to+\infty}{=} o\big(u^{-2}\big).$

On peut conclure que $u \mapsto f(u)\ln\big(f(u)\big)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $E(f)$ existe.

D'autre part, $(u-\varphi(u))^2e^{-u^2/2} = u^2e^{-u^2/2} - 2u\varphi(u)e^{-u^2/2} + \varphi^2(u)e^{-u^2/2}$.

$u \mapsto u^2e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue et $u^2e^{-u^2/2} \underset{|u|\to+\infty}{=} o\big(u^{-2}\big)$.

$u \mapsto \varphi^2(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après 7.

D'après 7. pour $|u| \geqslant B$, $|u\varphi(u)|e^{-u^2/2} \leqslant |u|\exp\Big(-\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{|u|}{2}+\dfrac{1}{4}\Big)$.

Comme $|u|\exp\Big(-\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{|u|}{2}+\dfrac{1}{4}\Big) \underset{|u|\to+\infty}{=} o\big(u^{-2}\big)$, la fonction $u \mapsto u\varphi(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, $u \mapsto (u-\varphi(u))^2e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi(f)$ existe.

11) D'après 5) en prenant $h = \ln\circ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln\circ f\circ\varphi)(u)e^{-u^2/2}du$$

12) $E(f) - \Phi(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[(\ln\circ f\circ\varphi)(u) - \frac{u^2}{2} - \frac{\varphi^2(u)}{2} + u\varphi(u)\Big]e^{-u^2/2}du.$

D'après 4. on a : $E(f) - \Phi(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(u\varphi(u) - u^2 - \ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)e^{-u^2/2}du.$

D'après 9. on a $I = 0$.

Donc $E(f)-\Phi(f) = E(f)-\Phi(f)-I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi'(u)-1-\ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)e^{-u^2/2}du.$

13) La fonction ln étant concave sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \ln(x) \leqslant x - 1$.
Comme $\varphi'(u) > 0$, on a : $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) - 1 - \ln\big(\varphi'(u)\big) \geqslant 0$.

On déduit de (1) que $E(f) \geqslant \Phi(f)$.

14) D'après le cours, si w est une fonction continue, positive sur $\mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} w = 0 \iff w = 0$. Donc $E(f) = \Phi(f) \iff \forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) - 1 = \ln\big(\varphi'(u)\big)$.
La fonction ln étant strictement concave, $\varphi'(u) = 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donc $\exists k \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}, \varphi(u) = u + k$.

On déduit de $(\star)$ que : $\forall x \in \mathbb{R}, f\big(\varphi(x)\big) = \exp\Big(\dfrac{\varphi^2(x) - x^2}{2}\Big)$.

Donc $\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = \exp\Big(\dfrac{u^2 - (\varphi^{-1}(u))^2}{2}\Big) = \exp\Big(ku - \dfrac{u^2}{2}\Big)$.

Partie III

15) Posons $\beta_n(u) = f_n(u)\ln\big(f_n(u)\big)e^{-u^2/2} = \psi(f_n(u))e^{-u^2/2}$. La suite de fonctions $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\beta : u \mapsto \psi(g(u))e^{-u^2/2}$.
les fonctions β_n et β sont continues sur $\mathbb{R}$.

Une étude rapide de la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ montre qu'elle est strictement décroissante sur $[0, 1/e]$ et strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$, son minimum étant $-1/e$.

Comme $f_n(u) = \dfrac{n-1}{n}g(u) + \dfrac{1}{n}$, on peut dire :

- si $g(u) \leqslant 1$ alors $0 \leqslant f_n(u) \leqslant 1$ et $|\beta_n(u)| \leqslant \dfrac{e^{-u^2/2}}{e}$;
- si $g(u) > 1$ alors $1 < f_n(u) < g(u)$. Comme ψ est croissante sur $[1, +\infty[$, $|\beta_n(u)| = \psi(f_n(u))e^{-u^2/2} \leqslant \psi(g(u))e^{-u^2/2} = \beta(u)$.

D'après les calculs de 10. la fonction β est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de convergence dominée, $E(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(g)$.

16) $\psi_j(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\gamma(n)}$ où $(\varphi_{\gamma(n)})$ est une suite extraite de (φ_n). On a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_n(x)} f_n(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$

$$\int_{-\infty}^{\varphi_{\gamma(n)}(x)} f_{\gamma(n)}(u)e^{-u^2/2}du = \frac{\gamma(n)-1}{\gamma(n)}\int_{-\infty}^{\varphi_{\gamma(n)}(x)} g(u)e^{-u^2/2}du + \frac{1}{\gamma(n)}\int_{-\infty}^{\varphi_{\gamma(n)}(x)} e^{-u^2/2}du.$$

On a, d'une part : $\dfrac{1}{\gamma(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \dfrac{\gamma(n)-1}{\gamma(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et d'autre part, la continuité des deux fonctions : $t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(u)e^{-u^2/2}du$ et $t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du$.

Donc : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_{\gamma(n)}(x)} f_{\gamma(n)}(u)e^{-u^2/2}du \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u)e^{-u^2/2}du.$
L'égalité (2) est donc vérifiée.