Chapitre 1

Lois de Probabilité

◗ Lois de Bernoulli, Binomiale, Poisson, Gauss ou normale

Lorsque des régularités d'ordre statistique apparaissent dans une distribution, cela évoque l'existence de **lois** de probabilités sous-jacentes.

Ces lois s'expliquent par la théorie des probabilités (modèle de la réalité).

Trois lois de probabilités rendent compte de la majorité des distributions de fréquences rencontrées :

- la loi binomiale,
- la loi de Poisson,
- la loi Gaussienne (ou loi normale).

Pour étudier ces **lois théoriques**, la distinction doit être faite - comme sur le plan expérimental - entre **variable aléatoire discontinue** et **continue**.

Formulation, propriétés, représentations graphiques, calculs de paramètres diffèrent selon le type de variable.

Les conditions d'application font également la différence entre ces lois.

Certaines lois (Poisson, Gauss) se trouvent tabulées ; ces tables sont présentées en annexe.

La loi gaussienne, très présente dans les tests statistiques, conduit aussi à d'autres tables notamment celle de l'écart-réduit (présentée en annexe également),

Enfin la vérification de normalité d'une distribution, autre que par test statistique (cf. chapitre 4), sera vue d'un point de vue graphique.

Exercices

1. La loi d'une variable aléatoire réelle X a pour densité de probabilité la fonction f définie, pour chaque x réel, par :

$$f(x) = k\, e^{-|x|}$$

Déterminer le coefficient k.

2. La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle admet pour densité la fonction f(x) définie par :

$f(x) = 0 \qquad \forall\ x < 0$
$f(x) = 2 - ax \qquad \text{pour } x \in [\ 0, 2\ [$
$f(x) = 0 \qquad \forall\ x \geq 2$

a) Déterminer la valeur de a.

b) La loi ainsi obtenue est-elle une loi de densité de probabilité ?

3. Sur 2000 familles ayant 4 enfants chacune, quel est le nombre de familles ayant :

a) un garçon,

b) deux garçons,

c) une ou deux filles,

d) aucune fille,

e) au moins un garçon.

(On suppose que la probabilité de la naissance d'un garçon est 1/2).

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de moyenne m = 2 et de variance : V = 4/3.

Calculer la loi de distribution de X.

5. On lance 360 fois un dé à 6 faces, non pipé :

a) A quelle distribution théorique obéit le nombre de "6" obtenu ?

b) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette distribution.

6. Une machine industrielle comprend 4 éléments dont la probabilité de fonctionnement, pendant un temps donné, de chacun d'eux est 0,95.
La machine cesse de fonctionner dès que 2 au moins des 4 éléments sont en panne.

Trouver la probabilité de fonctionnement de cette machine.

7. Si on étudie la population des personnes qui fument plus de 20 cigarettes par jour depuis 15 années, on constate que la probabilité qu'une personne tirée au hasard présente un cancer du larynx est de : $^{3}/_{1\ 000}$.

On demande de déterminer la probabilité que, parmi un échantillon de 2000 personnes tirées au hasard et fumant plus de 20 cigarettes par jour depuis 15 ans, il y ait exactement deux d'entre elles qui présentent un cancer du larynx.

8. Si la probabilité pour qu'un individu ait une mauvaise réaction à l'injection d'un certain sérum est 0,001, déterminer la probabilité pour que, sur 2 000 individus :

a) trois aient une mauvaise réaction,

b) plus de deux aient une mauvaise réaction.

9. On suppose que, dans un livre de 500 pages, il y a 300 fautes d'impression réparties au hasard.

Calculer la probabilité pour qu'une page donnée contienne :

a) exactement 2 fautes,

b) 2 fautes d'impression ou plus.

10. Soit une distribution normale de la valeur aléatoire X : $\mathcal{N}(1, 2)$.

Déterminer la densité de probabilité pour la valeur x = 1,5.

11. Soit une variable aléatoire gaussienne de moyenne 20 et d'écart-type 5.

a) Quelle est la probabilité des valeurs dépassant 12 ?

b) Quelle est la probabilité des valeurs comprises entre 12 et 29 ?

c) Déterminer la valeur dépassée par 40% des valeurs de cette variable aléatoire.

12. Une cantine sert des repas en très grand nombre. Chaque repas comporte une ration de viande. Les poids des rations de viande se répartissent, autour de la moyenne m = 117 g, suivant la loi normale d'écart-type 15 g.

a) Quelle est la probabilité pour que le poids d'une ration de viande soit compris entre 105 g et 132 g?

b) Le 1er mars, la cantine a servi 462 repas.
A combien peut-on évaluer le nombre de rations de viande dont le poids dépassait 135 g ?

13. Dans un lycée, la taille de 500 élèves de petites classes possède une répartition de moyenne 150 cm et d'écart-type 15 cm. En supposant cette répartition normale, trouver :

a) le nombre d'élèves dont la taille est comprise entre 120 et 155 cm,

b) le nombre d'élèves qui mesurent plus de 185 cm,

c) le nombre d'élèves qui mesurent moins de 128 cm.

14. Suite à une interrogation écrite faite par 357 étudiants, on a constaté que 23 étudiants avaient plus de 15/20 et 126 étudiants, moins de 5/20.

En supposant que la répartition des notes est sensiblement normale, en calculer la moyenne et l'écart-type.

15. On a étudié la répartition des poids dans un groupe de cent adultes de sexe féminin.

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Poids (kg)	**Effectifs**
[39,5 - 44,5 [	5
[44,5 - 49,5 [	12
[49,5 - 54,5 [	31
[54,5 - 59,5 [	31
[59,5 - 64,5 [	16
[64,5 - 69,5 [	3
[69,5 - 74,5 [	2

a) Vérifier l'hypothèse de normalité de la distribution, en utilisant le tracé de la droite de Henry.

b) Déterminer graphiquement, à partir de cette droite, les valeurs de la moyenne et de l'écart-type.

16. Considérons la répartition du taux de cholestérol dans un groupe de sujets bien portants.

Les données sont consignées dans le tableau suivant :

Taux de cholestérol (en cg) x_i	**Effectif** n_i
90	2
110	6
130	11
150	50
170	79
190	70
210	58
230	35
250	29
270	20
290	7
310	3
330	2
350	2
370	0
390	0
410	0
430	0
450	1

a) Représenter l'allure de la distribution.

b) Que vous évoque-t-elle ?

c) Vérifier graphiquement votre hypothèse.

d) Estimer graphiquement la moyenne et l'écart-type de cette distribution.

Q.C.M.

17. Que pensez-vous de ces affirmations ?

a. Dans une distribution unimodale et symétrique, mode, moyenne sont confondus et 50% des individus ont des valeurs inférieures à la moyenne.
b. Une variable quantitative continue peut être mise en classe.
c. Les variables qualitatives peuvent être continues ou discrètes.
d. Le nombre d'enfants d'une famille est une variable discrète.

18. Que pensez-vous de ces affirmations ?

a. La couleur d'une fleur, la forme ou la constitution d'un organe sont des caractères qualitatifs.
b. La taille, le poids, la température sont des caractères qualitatifs.
c. Dans un tableau représentant une série statistique, la valeur du dernier effectif cumulé est obligatoirement égal à la somme de tous les effectifs de la série.
d. La somme des fréquences relatives d'une série statistique est strictement inférieure à 1.

19. Que pensez-vous de ces affirmations ?

a. La loi de probabilité d'une variable discrète X est définie par les couples (x_i, p_i).
b. La représentation graphique des fréquences cumulées d'une distribution discrète est un diagramme en bâtons.
c. Le calcul de la variance d'une variable discrète s'effectue par :
$$V(X) = \sum_i p_i \quad x_i - m^2$$
où p_i désigne la probabilité de l'événement $X = x_i$.
d. La fonction de répartition d'une loi continue se définit par : $F(x_i) = P(X < x_i)$.

20. Que pensez-vous de ces affirmations ?

a. La loi normale est une loi dissymétrique.
b. Toutes les lois normales de moyenne m et d'écart-type σ peuvent être exprimées par la loi normale centrée réduite.
c. La normalité d'une loi de distribution peut se vérifier d'une manière graphique.
d. Un papier gausso-logarithmique permet de vérifier la loi de Galton Mc Allister.

21. En vous référant aux tables fournies en fin d'ouvrage, que pensez-vous de ces affirmations ?

a. La table de la fonction de répartition de la loi normale est la table de π (t).
b. Par complémentarité : π (t) = 0,5 - ϕ (t) t < 0.
c. La table de l'écart réduit donne, pour chaque alpha, la valeur t_α telle que la probabilité pour qu'une variable normale centrée réduite excède t_α en valeur absolue soit exactement alpha.
d. La valeur de t est lue à la fois en ligne et en colonne, que ce soit pour les tables de l'ordonnée, de ϕ (t), de π (t) ou encore de l'écart-réduit.

22. Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard et simultanément deux sujets ; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats dont les deux sujets proviennent d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-dessous :

k	0	1	2
P (X = k)	$\frac{290}{323}$	$\frac{32}{323}$	$\frac{1}{323}$

Quelle est la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

a. $\frac{34}{323}$.
b. $\frac{17}{323}$.
c. $\frac{33}{323}$.
d. $\frac{2}{19}$.

23. A propos de la loi binomiale, que pensez-vous de ces affirmations ?

a. Elle dépend de 2 paramètres : n et p, où n désigne le nombre total de réalisations de l'événement et p la probabilité d'un des événements possibles.
b. Pour aucune valeur de p, elle n'a une distribution symétrique.

c. L'écart-type est : $\sigma = \sqrt{n \,.\, p \,.\, q}$, où n désigne le nombre total de réalisations de l'événement, p et q les probabilités respectives des deux événements possibles.
d. L'écart-type est la racine carrée de la moyenne.

24. Si 20 % des pièces produites par une machine sont défectueuses, quelle est la probabilité, sur quatre pièces choisies au hasard, qu'aucune ne soit défectueuse ?

a. 0,4096.
b. 0,3128.
c. 0,8192.
d. 0,6075.

25. A propos de la loi de Poisson, que pensez-vous de ces affirmations ?

a. Elle est définie par 2 paramètres.
b. L'asymétrie de la courbe est importante quand la moyenne est petite, elle diminue lorsque la moyenne augmente.
c. On l'utilise dans le cas où les événements ont une probabilité faible.
d. $P_k = \frac{m^k}{k\,!} \,.\, e^m$.

26. A propos de la loi de Poisson, que pensez-vous de ces affirmations ?

a. En pratique, pour pouvoir appliquer la loi de Poisson, on prend p ≤ 1/30.
b. L'écart-type est la racine carrée de la moyenne.
c. La loi de Poisson dépend des mêmes paramètres que la loi binomiale.
d. La retranscription des familles de courbes de distribution est donnée par une table.

27. A propos de la loi de Poisson, que pensez-vous de ces affirmations ?

a. Elle est la loi limite de la loi normale.
b. Dans le calcul de ses paramètres caractéristiques, mode et moyenne sont confondus.
c. C'est une distribution discrète, symétrique.
d. Elle est la loi limite de la loi binomiale quand le nombre d'épreuves de Bernoulli est grand et le pourcentage de réussite ou d'échec faible.