

CHAPITRE I Introduction à la Mécanique des fluides

I MILIEU CONTINU

I.1 Définition

Le milieu continu est un modèle déjà introduit dans le cours de Thermodynamique de première année. A l'échelle macroscopique, la structure « granulaire » de la matière n'apparaît pas et aucun vide ne semble exister entre les différentes parties d'un objet. Il en est de même à l'échelle mésoscopique et il faut en fait descendre à l'échelle atomique pour constater que le vide peut représenter une partie importante du volume des corps. Mais une théorie qui ne prétend pas décrire les propriétés de la matière à une échelle aussi petite n'a pas besoin de prendre en compte cette réalité. C'est le cas de la Mécanique des fluides, qui ne descend pas en deçà de l'échelle mésoscopique.

Le plus petit élément de matière pris en compte en Mécanique des fluides est la particule fluide. C'est l'équivalent d'un point matériel de quelques micromètres de dimension suffisamment petite pour un appareil de mesure macroscopique et suffisamment grande pour que les fluctuations liées à l'agitation thermique soient inobservables. Toute grandeur physique locale, comme les champs de vitesse ou de masse volumique, sont en fait des moyennes spatiales à l'échelle de la particule fluide des propriétés des constituants fondamentaux du fluide, le plus souvent des molécules. Par contre, d'autres grandeurs locales, comme les champs de pression et de température, sont déjà par définition des grandeurs moyennes et n'ont pas de sens à l'échelle d'une molécule. Ce sont les grandeurs qualifiées d'émergentes en Thermodynamique.

Le fait de définir les grandeurs locales à l'échelle mésoscopique permet un « lissage » de leur comportement spatial. Si la masse volumique était définie à l'échelle de l'atome, elle présenterait une discontinuité à chaque fois qu'on passe du « bord » d'un atome au vide et inversement. Or travailler sur des fonctions non continues limite considérablement les capacités de calcul. On n'a donc aucun intérêt à construire un modèle de fluide à une échelle microscopique, sauf pour des applications très précises, quand il s'agit de construire de nouvelles propriétés émergentes comme les différents coefficients de diffusion. Nous supposons donc, sauf mention contraire, que les différents champs de vecteurs et de scalaires définis dans un fluide sont spatialement continus et le plus souvent dérivables au moins une fois.

Il est bien évident que la notion de milieu continu n'a de sens que si la particule fluide contient suffisamment de composants, atomes molécules ou ions, pour que ce « lissage » soit effectif. Cela suppose une concentration minimale de l'ordre du millier par micromètre cube. Dans un système de dimensions usuelles, c'est-à-dire de volume de l'ordre du mètre cube, on trouve donc au minimum 10^{21} atomes, molécules ou ions. Dans ces conditions, les collisions entre ces particules sont inévitables (c'est leur fréquence qui permet tous les phénomènes microscopiques de transfert, diffusion, vis-

cosité, conduction thermique) et la distance moyenne parcourue par une d'entre elles, appelée libre parcours moyen, est nettement inférieure à la dimension linéaire caractéristique du réservoir qui contient le fluide. Le modèle du milieu continu ne saurait s'appliquer à un fluide dans lequel ce libre parcours moyen serait supérieur à la dimension du réservoir. On serait alors dans un fluide sans collision, auquel ne s'appliquent pas les résultats du présent cours.

1.2 Milieu fluide

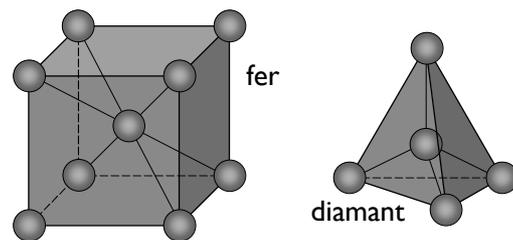
Le fluide est un milieu continu sans forme propre à l'échelle macroscopique. Ses limites se déplacent jusqu'à ce qu'elles aient atteint un obstacle qui empêche leur extension de se poursuivre. Ceci est dû à la quasi absence de forces de frottement au sein du fluide ou entre le fluide et un corps solide avec lequel il est en contact. Les seules actions mutuelles notables sont normales, du moins tant que les déplacements relatifs ne sont pas trop rapides. C'est pour cela qu'il est aisé de traverser un fluide avec un objet solide. Les couches de fluide glissent à la surface de celui-ci sans opposer de résistance. On dit que les fluides n'ont pas de rigidité. C'est cette mobilité qui explique leur écoulement à travers un orifice du récipient qui les contient.

La notion de fluide s'oppose à celle de solide, dans lequel la cohésion entre particules est aussi bien assurée par des actions mutuelles normales que tangentielles. La rigidité d'un solide lui permet de garder une forme propre, du moins pour le modèle idéal que constitue le solide parfait. Ainsi, un morceau de fer maintenu à l'abri de toute corrosion ne présentera aucune déformation même après plusieurs siècles.

La distinction entre fluide et solide est le plus souvent facile. Il existe pourtant des corps que l'on considère comme des solides, mais qui sont aisément déformables, ce qui signifie que les frottements internes sont en fait d'intensité intermédiaire entre ceux d'un fluide (très faibles) et d'un solide usuel (très forts). C'est le cas d'un grand nombre de composés organiques (élastomères, corps gras, gels...) qui à long terme finissent par s'écouler et perdre leur forme initiale.

A l'échelle microscopique, la différence entre les fluides et les solides s'explique par les interactions électrostatiques entre les particules, molécules, atomes ou ions. Dans un solide, leur intensité « bloque » chaque particule dans un puits de potentiel duquel elle ne peut sortir et la structure cristalline qu'adopte un corps solide, selon sa composition chimique, est celle d'énergie potentielle minimale. C'est pour cela qu'elle se répète indéfiniment : il n'y a qu'une configuration qui minimise l'énergie potentielle et elle ne doit pas être différente d'une région à l'autre du solide.

Le solide apparaît donc comme la répétition à grande échelle d'un motif unique appelé maille, formée seulement par quelques particules. Ainsi les mailles du fer et du diamant sont représentées ci-contre et suffisent à décrire la structure d'un bloc de taille arbitrairement grande. On a bien entendu agrandi



les dimensions de la maille par rapport à celle des atomes pour visualiser la disposition dans l'espace. En réalité les atomes sont quasiment au contact les uns des autres. Le choix d'un type de maille dépend à la fois de la structure électronique des constituants de la maille et de contraintes géométriques (on ne peut notamment « paver » l'espace qu'avec seulement sept grands types de mailles). Beaucoup de composés organiques

n'ont pas cette structure cristalline, c'est pourquoi leur comportement n'est pas celui de « vrais » solides. Ils sont qualifiés de solides amorphes.

Par contre, dans un fluide, l'énergie cinétique individuelle est comparable (pour un liquide) ou très supérieure (pour un gaz) à l'énergie potentielle. Chaque particule sort aisément du puits de potentiel et peut donc occuper n'importe quelle position. Les fluides n'ont donc pas de structure organisée. On ne peut jamais être certain à un instant donné que la particule qui occupe une certaine position est bien celle qu'elle occupait à un instant antérieur, alors qu'il n'y a pas de doute dans un solide.

Ce concept d'organisation microscopique est lié à celui d'isotropie. Dans un solide, l'existence locale d'une direction privilégiée dans la maille (ce n'est pas le cas dans le cube et le tétraèdre construits avec les atomes de fer et de carbone ci-dessus mais c'est assez fréquent) fait apparaître, par répétition indéfinie du motif, un axe privilégié dans le solide à l'échelle macroscopique. Les solides sont donc fréquemment anisotropes (mais pas le fer ni le diamant).

Par contre, l'absence de toute organisation fait que les fluides sont des milieux isotropes. Même si une direction privilégiée pouvait localement apparaître, elle ne concernerait que quelques particules et serait inobservable à l'échelle macroscopique. Depuis n'importe quelle particule fluide toutes les directions sont équivalentes. Si ce n'est pas le cas, ce ne peut être que du fait d'une intervention extérieure et non liée à une propriété intrinsèque du fluide. Ainsi, si la salinité de l'eau de mer varie avec la profondeur, c'est à cause du champ de pesanteur et si sa température varie également avec la profondeur, c'est du fait de l'ensoleillement.

Du fait de l'isotropie et de l'importance de l'énergie cinétique des particules, un fluide libre de toute action extérieure s'étend de manière radiale dans le vide et se dilue indéfiniment. Pour le confiner il faut un récipient hermétique ou contrer sa tendance à l'expansion par la pression exercée par un autre fluide qui l'entoure. Il adopte alors spontanément une forme sphérique ¹.

L'isotropie n'implique pas l'homogénéité. Une action extérieure peut très bien générer un champ de masse volumique $\mu(M)$ dans le fluide sans remettre en cause l'isotropie.

1.3 Liquides et gaz

Expérimentalement, on distingue deux types de fluides selon leur masse volumique et leur compressibilité :

- les liquides ont une masse volumique élevée, de l'ordre de 1000 kg.m^{-3} , dépendant très peu de la température et de la pression et leurs coefficients de compressibilité isotherme et de dilatation thermique sont par conséquent très faibles, χ_T étant de l'ordre de 10^{-10} à 10^{-9} Pa^{-1} et α de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-3} K^{-1} ;

- les gaz ont une masse volumique beaucoup plus petite, de l'ordre de 1 kg.m^{-3} , dépendant fortement de la température et de la pression et leurs coefficients de compressibilité isotherme et de dilatation thermique sont nettement plus élevés, χ_T étant de l'ordre de 10^{-5} Pa^{-1} et α de l'ordre de $0,03 \text{ K}^{-1}$ dans les conditions usuelles.

Les écoulements de liquides et de gaz ont pour ces raisons des propriétés différentes. Pour les liquides, on peut considérer qu'il s'agit d'écoulements de fluides de masse volumique uniforme et indépendante du temps, ce qui simplifie considérablement leur

¹ Ce que découvre avec surprise le capitaine Haddock dans la fusée lunaire !

étude. Pour les gaz, on doit considérer la masse volumique comme un champ de scalaires faisant partie des inconnues du problème.

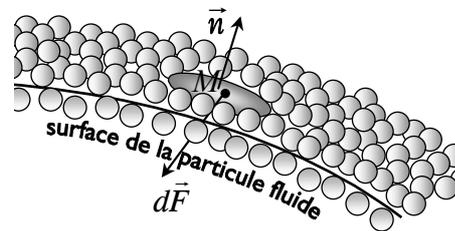
La différence d'ordres de grandeurs pour les coefficients α et χ_T s'explique par les différences dans les structures microscopiques. Un gaz occupe tout le volume qui s'offre à lui car il est constitué de particules (molécules ou atomes), séparées les unes des autres par des distances grandes relativement à leur diamètre. Leurs interactions mutuelles sont donc de faible intensité et c'est essentiellement leur énergie cinétique individuelle qui est responsable des propriétés du gaz, notamment la tendance spontanée à l'expansion : les particules progressent en ligne droite jusqu'à ce qu'elles soient déviées par une collision mutuelle ou la paroi du récipient qui contient le gaz.

Dans un liquide, les particules sont quasiment en contact. Leurs interactions électromagnétiques sont élevées et l'énergie potentielle associée est comparable à leurs énergies cinétiques. Elles ne peuvent s'interpénétrer du fait de la répulsion électrostatique des orbitales mais restent fortement liées et constituent une structure compacte dans laquelle elles ne peuvent que glisser les unes sur les autres, avec très peu d'espace vide. Aucune variation de volume significative n'est donc possible.

1.4 Forces internes

1.4.1 Contrainte - pression

Imaginons qu'il soit possible de « voir » la surface d'une particule fluide à l'échelle atomique. C'est la seule fois où nous « descendrons » à cette échelle. Les atomes ou molécules la constituant exercent sur les atomes ou molécules situés à l'extérieur des actions mutuelles qui sont de nature dipolaire et qui décroissent très vite avec la distance (au moins en raison inverse de la sixième puissance de la distance)². On peut donc considérer que pratiquement seules les molécules situées de part et d'autre de la frontière entre la particule fluide et son environnement interagissent. Un élément de surface infinitésimal dS de celle-ci, centré sur le point M , ne subit par conséquent de la part du reste du fluide que des forces dont la résultante $d\vec{F}$, proportionnelle au nombre de particules du fluide ayant une action notable c'est-à-dire immédiatement sus-jacentes à dS , doit dépendre linéairement de dS . Il existe par conséquent un champ de vecteurs $\vec{\sigma}(M)$ tel que $d\vec{F} = \vec{\sigma}(M) dS$. On l'appelle contrainte et elle se décompose en deux termes :



- une composante tangentielle $\vec{\sigma}_t$ qui s'oppose toujours au mouvement relatif des deux couches de particules de part et d'autre de la surface de la particule fluide,
- une composante normale $\vec{\sigma}_n$ qui s'oppose toujours à l'interpénétration des deux mêmes couches et qui pour cette raison tend à confiner la particule fluide.

La composante tangentielle est quasiment nulle dans un fluide au repos. La contrainte se réduit alors à $\vec{\sigma}_n = -P(M)\vec{n}$ où P est un champ de scalaires positif et \vec{n} la nor-

² Ce sont les interactions dites de van der Waals, représentant les forces électrostatiques mutuelles entre deux dipôles ; elles sont attractives à distance mais deviennent répulsives quand les molécules sont quasiment en contact.

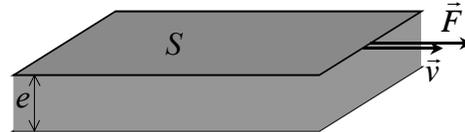
male locale, orientée vers l'extérieur de la particule fluide. A la surface du fluide, ce champ de scalaires s'identifie à la pression qu'il exerce sur son environnement et on définit ainsi le champ de pression, déjà introduit en Thermodynamique.

1.4.2 Viscosité

Expérimentalement, on constate que la résistance au cisaillement entre deux couches de fluide varie proportionnellement à leur vitesse relative. On peut citer la célèbre expérience de Newton, aisément reproductible.

Entre deux plaques planes parallèles, de même aire S et séparées d'une distance e , est placé un liquide initialement au repos.

On maintient la plaque inférieure immobile et on tire sur la plaque supérieure pour la



faire progresser à la vitesse \vec{v} dans son plan. On constate alors qu'il faut exercer une force de traction constante pour maintenir \vec{v} également constante et qu'elle dépend des différents paramètres de la manière suivante :

$$\vec{F} = \text{cte} \frac{S\vec{v}}{e}.$$

Si maintenant la plaque inférieure n'est pas fixe, on constate qu'elle est entraînée par le mouvement de plaque la supérieure et qu'il faut exercer sur elle une force exactement égale à $-\vec{F}$ pour la maintenir immobile.

Enfin, si les deux plaques sont en mouvement, on retrouve la même expression de la force en notant \vec{v} comme la vitesse relative de la plaque supérieure, c'est-à-dire la différence de sa vitesse et de celle de la plaque inférieure.

Il existe par conséquent une force de frottement entre le fluide et les plaques, égale à $\pm\vec{F}$ selon le système qui l'exerce et celui qui la subit, ce qui signifie qu'une résistance au cisaillement apparaît dès qu'un fluide est mis en mouvement. C'est uniquement au repos que cette résistance disparaît.

On retrouve le même résultat avec un gaz, la constante apparaissant dans l'expression de \vec{F} étant toutefois beaucoup plus petite. La valeur de cette constante dépend de la nature du fluide et pas de celle des plaques si leur surface est bien lisse. On l'appelle viscosité dynamique du fluide. L'isotropie de celui-ci permet d'affirmer que sa valeur ne dépend pas de la direction de la force. La viscosité est une grandeur scalaire, que l'on note habituellement η . Comme celui-ci transmet de la plaque supérieure à la plaque inférieure l'intensité du frottement que le mouvement de la première engendre, il faut admettre que ce frottement existe au sein du fluide et c'est lui que représente la composante $\vec{\sigma}_T$. La viscosité se manifeste par conséquent dans l'ensemble du fluide et pas seulement sur les surfaces de contact avec les plaques.

Dans le Système International, la viscosité dynamique a pour unité le poiseuille, de symbole Pl. Sa dimension est la suivante :

$$[\eta] = \frac{[F][e]}{[S][v]} = \frac{[m][L]^2[T]^{-2}}{[L]^3[T]^{-1}} = [m][L]^{-1}[T]^{-1}.$$

Le poiseuille est donc le kilogramme par mètre et par seconde. C'est une unité très grande et les viscosités se mesurent en millipoiseuilles pour les liquides et en micropoiseuilles pour les gaz.

On définit également la viscosité cinématique du fluide $\nu = \frac{\eta}{\mu}$. Elle a pour dimension

$[L]^2[T]^{-1}$ et on sait la calculer théoriquement à partir de modèles de structure microscopique. Les deux viscosités et la masse volumique sont a priori des champs de scalaires et peuvent différer d'un point à l'autre de l'écoulement d'un fluide, notamment par le fait qu'elles dépendent toutes de la température.

L'expression que nous avons obtenue de la force de frottement n'est valable que si l'épaisseur e reste suffisamment faible, de l'ordre du millimètre. Pour des valeurs plus élevées, on n'a plus une relation simple entre force et vitesse relative.

Si on reste avec des valeurs assez faibles, la force de frottement subie par unité de surface de la plaque inférieure s'écrit finalement $\vec{\sigma}_t = \frac{\eta \vec{v}}{e}$.

1.4.3 Forces volumiques

Le fluide peut être placé dans un champ de force extérieur, par exemple le champ de pesanteur. Chaque particule fluide subit alors une force proportionnelle à une de ses propriétés scalaires extensives (la masse dans le cas de la pesanteur). Celle-ci doit donc s'écrire, pour une particule fluide de masse δm , ou de volume δV , centrée sur le point M :

$$\delta \vec{F} = \vec{f}(M) \delta m = \vec{f}(M) \mu(M) \delta V,$$

μ étant la masse volumique locale du fluide et \vec{f} un champ de vecteurs représentant la force par unité de masse. Par exemple, pour le champ de pesanteur, \vec{f} s'identifie à l'accélération de la pesanteur \vec{g} .

Les champs de forces sont en général conservatifs et $\vec{f}(M)$ s'exprime comme un gradient. Il existe par conséquent un champ de scalaires e_p tel que :

$$\delta \vec{F} = -\overline{\text{grad}} e_p \times \mu(M) \delta V.$$

C'est le potentiel, ou énergie potentielle par unité de masse. Dans le cas de la pesanteur, il est égal à gz si on appelle Oz l'axe définissant la verticale ascendante.

2 CARACTERISTIQUES D'UN ECOULEMENT

2.1 Grandeurs locales - champs

Comme dans un solide, la vitesse de déplacement des différentes parties d'un fluide n'est pas uniforme et il faut introduire un champ de vecteurs $\vec{v}(x, y, z, t)$ pour décrire le mouvement de chaque particule fluide. C'est le champ de vitesse, principale inconnue à déterminer quand on étudie un écoulement de fluide. Ses lignes de champ sont appelées lignes de courant et elles constituent la meilleure description instantanée de l'écoulement.

Le fluide en mouvement n'étant certainement pas en équilibre thermodynamique, la pression et la température n'y sont pas uniformes et il faut également introduire les

champs de pression $P(x, y, z, t)$ et de température $T(x, y, z, t)$, reliés par l'équation d'état locale au champ de masse volumique $\mu(x, y, z, t)$.

Enfin, dans le cas où le fluide est un mélange de corps purs, il faut également introduire un champ de concentration $c_i(x, y, z, t)$ pour chaque espèce chimique i . Mais, dans la suite du cours, nous ne nous intéresserons pas à la composition chimique du fluide et n'utiliserons pas ces champs de concentration.

Tous ces champs sont généralement des fonctions du temps car les écoulements ne sont pas stationnaires et on entrevoit déjà la difficulté de travailler avec autant de grandeurs physiques, chacune à quatre variables !

2.2 Description lagrangienne

En Mécanique du point, le mouvement de l'objet étudié est décrit par sa trajectoire, donnée sous forme paramétrique $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Elle dépend également des conditions initiales et, la trajectoire étant obtenue par résolution du principe fondamental de la dynamique qui fournit une équation différentielle du second ordre, celles-ci portent sur la position et la vitesse, de sorte que l'on a de manière exhaustive :

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t),$$

\vec{r}_0 et \vec{v}_0 étant respectivement les vecteurs position et vitesse à l'origine des dates.

Quand on étudie le mouvement d'un ensemble de points matériels on doit ainsi déterminer les différentes trajectoires individuelles et il faut résoudre autant d'équations qu'il y a de points. Quand ceux-ci ont des mouvements indépendants les uns des autres, c'est encore possible mais s'ils interagissent, la difficulté de résolution de ces équations augmente plus vite que leur nombre.

Cette description d'un système matériel, qui consiste à étudier séparément le mouvement de chaque point matériel et de le suivre dans l'espace en représentant sa trajectoire, est dite lagrangienne. Dans celle-ci, la vitesse du point est la dérivée par rapport au temps du vecteur position, les conditions initiales étant données, c'est-à-dire qu'elle se calcule mathématiquement en les considérant comme des constantes :

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_{\vec{r}_0, \vec{v}_0},$$

ce que l'on écrit habituellement $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ car il ne viendrait pas à l'esprit de dériver par rapport au temps des conditions initiales.

De la même manière, l'accélération instantanée de chaque point matériel est rigoureusement :

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{r}_0, \vec{v}_0}.$$

2.3 Description eulérienne

Il en va différemment dans un milieu continu. Le nombre de points matériels, sur lesquels sont centrés les éléments de volume infinitésimaux dV , est formellement infini et il n'est pas possible de résoudre une infinité d'équations, qui sont de plus vraisemblablement

blement couplées entre elles. Il est nécessaire d'avoir une approche globale car c'est le seul moyen pour obtenir un nombre fini d'équations à résoudre. C'est pour cela que l'on a introduit les différents champs à la page précédente. Chacun constitue une fonction unique, scalaire ou vectorielle, et regroupe une infinité de valeurs locales d'une même variable. Le champ de vitesse représente ainsi toutes les vitesses de toutes les particules fluides et de même pour les champs de pression et de température.

On passe ainsi à trois variables principales, \vec{v} , P et T . Chaque champ n'est plus une fonction de conditions initiales propres à chaque particule fluide mais dépend des coordonnées spatiales et éventuellement du temps. Le champ de vitesse s'écrit ainsi :

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

et ne doit pas être considéré comme la dérivée du champ de vecteur position puisque la notation $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ montre qu'on ne saurait obtenir une vitesse en le dérivant. C'est la vitesse de passage de différentes particules se succédant au cours du temps en des points géométriques fixes. Le champ de vitesse se substitue donc en tant que principale variable cinématique aux différentes trajectoires.

Cette description, la seule possible dans un milieu continu, est dite eulérienne. Elle n'interdit pas, une fois obtenu le champ de vitesse, de trouver la trajectoire d'une particule fluide précise, mais ce n'est pas sa finalité.

Dans la description eulérienne, la notion de dérivée temporelle doit être précisée. Plaçons-nous en un point géométrique M du système. S'y succèdent au cours du temps différentes particules fluides qui « transportent » avec elles leurs valeurs individuelles des variables locales \vec{v} , P , T et μ ³. Si on s'intéresse à la variation dans le temps de l'une ou l'autre de ces grandeurs, **au point géométrique où l'on s'est placé**, il faut ne tenir compte que de sa valeur pour la particule fluide qui passe par M à chaque instant, c'est-à-dire étudier l'évolution temporelle de la variable en un lieu de coordonnées fixes. Cette évolution est donc donnée par la dérivée partielle par rapport au temps. On a ainsi par exemple pour la vitesse :

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\text{eul}} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{x,y,z} .$$

Notons bien que cette dérivée n'est pas l'accélération d'une particule fluide. Elle n'est pas calculée en suivant le mouvement d'un point matériel mais en regardant passer en un point fixe une succession de points matériels de vitesses différentes.

2.4 Relation entre dérivées lagrangienne et eulérienne

Il existe une relation mathématique entre les deux dérivées temporelles ainsi définies. Soit $f(x, y, z, t)$ un certain champ représentant une propriété physique locale des particules fluides. Quand on étudie son évolution au cours du temps au point géométrique M , on utilise la dérivée locale :

$$\left(\frac{df}{dt} \right)_{\text{eul}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{x,y,z}$$

que nous qualifierons d'eulérienne.

³ La particule fluide est de dimension suffisamment grande pour que les grandeurs émergentes aient un sens à son échelle.