Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même. Soient v un élément de $\mathcal{L}(E)$ et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf. L'espace $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme
$v \mapsto |||v||| = \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} \|vf\|$.

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la quatrième partie. Pour ce faire, dans les deux premières parties, on met en place les outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x > 0$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \big(\ln(t)\big)^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

De plus, pour tout $x > 0$, cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Partie I- Questions préliminaires

I.1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

I.2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

I.3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma > 0, \gamma^x \underset{x \to +\infty}{=} o\big(\Gamma(x)\big)$.

Partie II- Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit Φ une application continue de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geqslant 0$ tel que la fonction Φ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

II.A.1) Établir que la fonction Φ est positive sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

(On pourra raisonner par l'absurde).

II.A.2) Soit h un nombre réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand,

$$0 \leqslant h\Phi(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \Phi(t)dt.$$

b) Montrer que la série $\sum h\Phi(nh)$ converge.

II.A.3) Prouver que : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} h\Phi(nh) = \int_0^{+\infty} \Phi(t)dt.$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h\Phi(nh) = \sum_{n=0}^{[a/h]} h\Phi(nh) + \sum_{n=[a/h]+1}^{\infty} h\Phi(nh)$$

où $[a/h]$ désigne la partie entière du nombre réel a/h.)

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha > 1$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par la formule $g_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \big(-\ln(x)\big) \sum_{n=0}^{\infty} g_\alpha\big(-n\ln(x)\big) = \Gamma(\alpha).$

II.B.2) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\alpha-1}x^n$.

a) Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note S_α la somme de cette série entière.

b) Prouver que $\displaystyle S_\alpha(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.$

Partie III- La première fonction eulérienne

III.A-

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

Pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple (α,β) de réels strictement positifs, les relations suivantes :

(i) $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$,

(ii) $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt$

(on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}\cdot$)

(iii) $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

III.B - On se propose d'établir pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$ la formule suivante : $$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs 2.

III.B.2) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose :

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}.$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0,1]$. On note $A_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire tel que $\forall x,y \in [0,1], |\psi_{\alpha,\beta}(x) - \psi_{\alpha,\beta}(y)| \leqslant A_{\alpha,\beta}|x-y|$.

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$|u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}\cdot$$

c) On reprend les notations de la question (II.B.2).

Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n.$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel $x, 0 \leqslant x < 1$,

$$\left|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)\right| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)$$

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma>0}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

III.C - Formule des compléments

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

III.C.2) Soient p et q deux entiers naturels tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que $B\Big(\dfrac{2p+1}{2q}, 1 - \dfrac{2p+1}{2q}\Big) = 2q \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt$.

b) Pour tout entier $k \in [\![0, q-1]\!]$, on note $z_k = \exp\Big(i \dfrac{2k+1}{2q}\pi\Big)$.

Établir que $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\dfrac{1}{2q} \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \Big(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\Big)$ $\qquad (\star)$.

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction

$t \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\Big((t - \Re e(c))^2 + (\Im m(c))^2\Big) + i \arctan\Big(\dfrac{t - \Re e(c)}{\Im m(c)}\Big)$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-c}$, prouver en utilisant judicieusement la relation $(\star)$ que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

En conclure que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \frac{\pi}{2q} \frac{1}{\sin\Big(\dfrac{2p+1}{2q}\pi\Big)}$

III.C.3) Déduire de (III.C.1) et (III.C.2) que :

$$\forall \alpha \in]0,1[, B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Partie IV- L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant l'intervalle $]0,1[$.

IV.A-

IV.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, x[$.

IV.A.2) Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ ; } A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \text{ si } 0 < x \leqslant 1.$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0,1]$, $A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(tx)}{(1-t)^\alpha}dt.$

b) Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction $A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$|||A_\alpha||| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}\cdot$$

IV.B - On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = I_E$ (application identité de E) et, pour tout $n \geqslant 0$, par la relation de récurrence suivante $A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n$

IV.B.1) On pose $\beta = 1-\alpha$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0,1]$, établir l'inégalité suivante : $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant \dfrac{x^{n\beta}\big(\Gamma(\beta)\big)^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|.$

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que : $|||A_\alpha^n||| \leqslant \dfrac{\big(\Gamma(\beta)\big)^n}{\Gamma(1+n\beta)}\cdot$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif γ, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n \frac{\big(\Gamma(\beta)\big)^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.$$

(On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

IV.B.3) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$. On note g la somme de cette série de fonctions.

b) Prouver que : $(I_E - \lambda A_\alpha)g = f$.

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $I_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que : $(I_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_\alpha^n$

où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

IV.C - Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monomiale $t \mapsto t^n$.

IV.C.1) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

b) En déduire que : $(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\,\dfrac{e_{n+1}}{n+1}\cdot$

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante : $\forall x \in [0,1], Pf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} Pe_n.$$

Établir que pour toute fonction polynomiale ψ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P\psi.$$

IV.C.3) ***Formule d'inversion d'Abel.***

a) Montrer que P est un endomorphisme continu de E tel que $|||P||| = 1$.

b) On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer que : $B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P$

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe sa dérivée.

Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et que : $D \circ B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} I_E$.

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

Solution

Partie I

I.1) La fonction Γ étant continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$ et vérifiant $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, il existe $c\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$ d'après le théorème de Rolle.

I.2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^\star, \Gamma''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(\ln(t)\big)^2e^{-t}t^{x-1}dt>0$ car la fonction $t\mapsto\big(\ln(t)\big)^2e^{-t}t^{x-1}$ est continue, positive distincte de la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^\star$. Donc Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Comme Γ' est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, on déduit de I.1) que $\Gamma'(x)<0$ si $x\in]0,c[$, $\Gamma'(x)>0$ sur $]c,+\infty[$. Par suite Γ est strictement croissante sur $[c,+\infty[$ *a fortiori* sur $[2,+\infty[$.

I.3) Γ croît sur $[2,+\infty[$, si $x\geqslant 1$, $\Gamma(x+1)\geqslant\Gamma\big(E[x+1]\big)=\big(E[x]\big)!$, par conséquent $\Gamma(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, Donc, si $0<\gamma\leqslant 1$ le résultat est immédiat.

Si $\gamma>1$, posons $n=[x]\leqslant x\leqslant n+1$, alors $0<\dfrac{\gamma^{x+1}}{\Gamma(x+1)}\leqslant\dfrac{\gamma^{n+2}}{n!}=\gamma^2\dfrac{\gamma^n}{n!}\cdot$

Comme la série $\sum\dfrac{\gamma^n}{n!}$ converge de somme e^γ, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{\gamma^{n+2}}{n!}=0$ et, par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)}=0$ *i.e.* $\gamma^x\underset{x\to+\infty}{=}o\big(\Gamma(x)\big)$.

Partie II

II.A.

II.A.1) S'il existe $t_1\geqslant t_0$ tel que $\Phi(t_1)<0$. Comme Φ est décroissante sur $[t_0,+\infty[$, on a $\Phi(t)\leqslant\Phi(t_1)<0$ pour tout $t\geqslant t_1$ *i.e.* pout tout $t\in[t_1,+\infty[$, $0<-\Phi(t_1)\leqslant\Phi(t)$. La fonction constante non nulle $t\mapsto\Phi(t_1)$ n'étant pas intégrable sur $[t_0,+\infty[$, l'inégalité précédente entre fonctions positives implique la non intégrabilité de Φ sur $[t_0,+\infty[$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc la fonction Φ est positive sur $[t_0,+\infty[$.

II.A.2) a) Soit $n_0=\left[\dfrac{t_0}{h}\right]+1$. Alors $n>n_0\Rightarrow(n-1)h\geqslant n_0h\geqslant t_0$.
Comme Φ est décroissante sur $[t_0,+\infty[$, pour tout $n>n_0$ on a
$\forall t\in[(n-1)h,nh], 0\leqslant\Phi(nh)\leqslant\Phi(t)\leqslant\Phi((n-1)h)$.
Φ étant continue sur le segment $[(n-1)h,nh]$, l'inégalité de la moyenne donne

$$0\leqslant h\Phi(nh)\leqslant\int_{(n-1)h}^{nh}\Phi(t)dt\leqslant h\Phi((n-1)h)\qquad(\star).$$

b) La suite de segments $\big([n_0h,nh]\big)_{n>n_0}$ étant une suite exhaustive de segments de l'intervalle $[n_0h,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n>n_0}\int_{(n-1)h}^{nh}\Phi(t)dt$ dont les sommes partielles sont $n \mapsto \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{(k-1)h}^{kh} \Phi(t)dt = \int_{n_0 h}^{nh} \Phi(t)dt$ est une série convergente puisque Φ est intégrable sur $[t_0, +\infty[$. On déduit de l'inégalité de II.2.a) que la série $\sum h\Phi(nh)$ converge.

II.A.3) Notons $N(h) = \left[\dfrac{t_0}{h}\right]$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} h\Phi(nh) = U(h) + V(h)$, où

$U(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{h(N(h)+1)} h\Phi(nh)$ et $V(h) = \displaystyle\sum_{n=h(N(h)+2)}^{\infty} h\Phi(nh)$ et montrons que

$\displaystyle\lim_{h\to 0^+} U(h) = \int_0^{t_0} \Phi(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} V(h) = \int_{t_0}^{+\infty} \Phi(t)dt$.

(i) On déduit de $(\star)$ que, puisque la série $\sum h\Phi(nh)$ converge et Φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ que

$$\sum_{n=N(h)+2}^{\infty} h\Phi(nh) \leqslant \int_{h(N(h)+1)}^{+\infty} \Phi(t)dt \leqslant \sum_{n=N(h)+1}^{\infty} h\Phi(nh)$$

i.e. $\displaystyle V(h) \leqslant \int_{h(N(h)+1)}^{+\infty} \Phi(t)dt \leqslant V(h) + h\Phi(h(N(h)+1)) \qquad (\star\star).$

Or $hN(h) \leqslant t_0 < h(N(h)+1) \leqslant t_0 + h$ implique $t_0 - h \leqslant hN(h) \leqslant t_0$. Donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} hN(h) = t_0$.

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \Phi$ étant une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction continue Φ, est elle même continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \int_{h(N(h)+1)}^{+\infty} \Phi(t)dt = \int_{t_0}^{+\infty} \Phi$.

Par passage à la limite quand h tend vers 0, on déduit dans $(\star\star)$ que

$\displaystyle\lim_{h\to 0^+} V(h) = \int_{t_0}^{+\infty} \Phi(t)dt.$

(ii) En utilisant la relation de Chasles dans les intégrales, on a

$$U(h) - \int_0^{h(N(h)+1)} \Phi(t)dt = \sum_{n=0}^{N(h)} \int_{nh}^{(n+1)h} \big(\Phi(nh) - \Phi(t)\big)dt.$$

La fonction Φ étant continue sur $[0, h(N(h)+1)]$ y est unifomément continue d'après le théorème de Heine. Donc

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^\star, \forall (x,y) \in [0, h(N(h)+1)]^2, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant \varepsilon.$

Si $t \in [nh, (n+1)h]$ alors $|t - nh| \leqslant (n+1)h - nh = h$.

Donc $0 < h < \alpha \Rightarrow |\Phi(t) - \Phi(nh)| \leqslant \varepsilon$.

D'où $0 < h \leqslant \alpha \Rightarrow \left|U(h) - \displaystyle\int_0^{h(N(h)+1)} \Phi(t)dt\right| \leqslant \varepsilon h(N(h)+1) \leqslant \varepsilon(t_0 + \alpha).$

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} U(h) = \int_0^{t_0} \Phi(t)dt$ et le résultat est prouvé.