Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n°1

Notations.

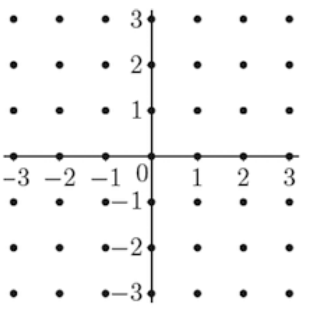
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure usuelle de plan euclidien. La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est notée d.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont représentés par des vecteurs colonnes à 2 lignes. On note

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On appelle réseau l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, inclus dans le plan $\mathbb{R}^2$. On le note $\mathcal{R}$. Le schéma ci-dessous représente une partie du réseau $\mathcal{R}$.



Partie A : $\mathbb{Z}$-bases du réseau

Soient $\mathcal{B} = (e'_1; e'_2)$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{Z}$-base de si :

- $e'_1, e'_2 \in \mathcal{R}$.
- Tout élément X de $\mathcal{R}$ s'écrit de façon unique $X = ae'_1 + be'_2$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

I. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II. Soient $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $X = xe'_1 + ye'_2$ si, et seulement si, $X = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. On suppose dans cette question que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

a. Montrer que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.

b. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$x_1e'_1 + y_1e'_2 = e_1 \qquad x_2e'_1 + y_2e'_2 = e_2.$$

c. Soit $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = I_2$.

d. En déduire que $\det(A) \in \{-1, 1\}$·

3. On suppose dans cette question que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$·

a. Montrer que A est une matrice inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

b. Montrer que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

4. Conclure.

III. Soit $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{R}$.

1. Montrer que si e_1 est le premier vecteur d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$, alors a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

2. Réciproquement, montrer que si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe un vecteur e'_2 de $\mathcal{R}$ tel que (e'_1, e'_2) soit une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

3. Donner une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ dont le premier vecteur est $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Partie B : transformations linéaires du réseau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Sa matrice dans la base $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est notée A.

I. Montrer que $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ si, et seulement si, les coefficients de A sont tous des entiers relatifs.

II. On suppose dans cette question que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ contient deux vecteurs linéairement indépendants.

2. En déduire que f est surjective, puis bijective.

3. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

4. Justifier que A est inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

5. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$·

III. On suppose dans cette question que les coefficients de A sont des entiers relatifs et que $\det(A) \in \{-1, 1\}\cdot$

1. En utilisant les résultats de la partie **A.**, montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

2. En déduire que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. Conclure.

Partie C : isométries du réseau

Soit G l'ensemble des isométries affines f de $\mathbb{R}^2$ telles que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et soit G_0 l'ensemble des éléments f de G tels que $f(O) = O$.

I. Montrer que G, muni de la loi de composition des applications, est un groupe et que G_0 est un sous-groupe de G.

II. Soit $f \in G_0$. On remarque qu'alors f est une application linéaire et que les résultats de la partie **B.** s'appliquent. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer tous les points X de $\mathcal{R}$ situés à la distance 1 de O.

2. Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à l'ensemble

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que A appartient à l'ensemble :

$$H = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$$

III. Soient s_1 et s_2 les applications linéaires de matrices respectives dans la base $\mathcal{C}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Décrire la nature géométrique de s_1 et s_2.

2. Décrire la nature géométrique de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$ et donner leurs matrices dans la base canonique.

3. Montrer que s_1 et s_2 sont des éléments de G_0.

4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est dans H, alors f est un élément de G_0.

IV. Donner tous les éléments de G_0.

V. Soit t la translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $t \in G$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$.

VI. Soit $f \in G$ et soit t' la translation de vecteur $-f(O)$. Montrer que t' est un élément de G et que $g = t' \circ f$ est un élément de G_0.

VII. Montrer que tout élément f de G s'écrit de façon unique $f = t \circ g$, avec t une translation de vecteur dans $\mathcal{R}$ et g un élément de G_0.

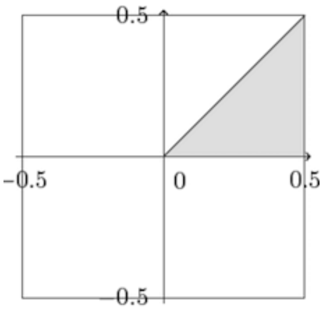
Partie D : un pavage du plan

On note T la surface délimitée par le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on note C la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



I. 1. Justifier que $C = \displaystyle\bigcup_{g \in G_0} g(T)$.

2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de G_0, alors l'intersection des triangles $g_1(T)$ et $g_2(T)$ est, soit un segment, soit un point.

II. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note t_X la translation de vecteur X.

1. Justifier que : $\mathbb{R}^2 = \displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C)$.

2. Montrer que si X et Y sont deux éléments distincts de $\mathcal{R}$, alors l'intersection des carrés $t_X(C)$ et $t_Y(C)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

III. 1. Justifier que : $\mathbb{R}^2 = \displaystyle\bigcup_{f \in G} f(T)$.

2. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de G, alors l'intersection des triangles $f_1(T)$ et $f_2(T)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

Partie E : un sous-groupe et deux frises

I. Soit k un entier relatif. On considère les applications
$t_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix}$ et $s_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix}$

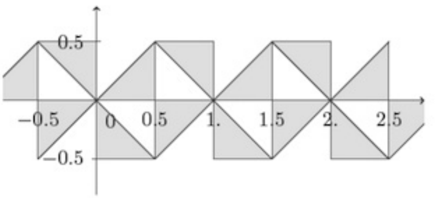
1. Quelle est la nature géométrique de t_k et s_k ?

2. Soit k et ℓ deux entiers relatifs. Décrire $t_k \circ s_\ell$, $s_k \circ t_\ell$, $s_k \circ s_\ell$ et $t_k \circ t_\ell$.

II. Soit $H = \{t_k, s_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$· Montrer que H est un sous-groupe de G.

III. On considère l'ensemble $F = \bigcup\limits_{f \in H} f(T)$,
où T est le triangle défini dans la section **D.** Décrire l'ensemble F.

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupe des isométries qui conservent cette frise est un sous-groupe de G qu'on décrira.

Problème n°2

Notations.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Dans ce problème, on cherche à déterminer les applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(a) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y,
$$f(xf(y)) = yf(x).$$

(b) f est bornée sur $]1, +\infty[$: il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $x \geqslant 1, f(x) \leqslant A$.

I. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit φ une application définie sur I et à valeurs dans I. On dit que φ est une involution de I si pour tout nombre réel x dans $I, \varphi\big(\varphi(x)\big) = x$.

1. Donner un exemple d'involution de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ autre que l'identité.

2. Donner un exemple d'involution de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ autre que l'identité.

3. Montrer qu'une involution de I dans I est bijective.

II. Soit f une fonction vérifiant les conditions **(a)** et **(b)**.

1. Soit deux nombres réels y_1, y_2 strictement positifs tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Montrer que $y_1 f(1) = y_2 f(1)$.

2. Montrer que f est injective.

3. Montrer que $f(f(1)) = f(1)$ puis que $f(1) = 1$.

4. Montrer que f est une involution de $]0, +\infty[$.

5. Soient a et b deux réels strictement positifs.
Montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$. Indication : on pourra poser $y = f(b)$.

III. On note F l'ensemble des points fixes de f :
$F = \{x \in]0, +\infty[\,|\, f(x) = x\}\cdot$

1. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[, xf(x) \in F$.

2. Montrer que $1 \in F$.

3. Montrer que si x et y sont des éléments de F, alors xy et $\dfrac{x}{y}$ sont également des éléments de F.

4. Montrer que si x est un élément de F, alors pour tout entier naturel n, x^n est un élément de F.

5. Montrer que si x est un élément de F, alors $x \leqslant 1$. Indication : on pourra considérer la suite $(x^n)_{n \geqslant 0}$.

6. Montrer que $F = \{1\}\cdot$

7. En déduire f.

IV. Donner toutes les applications répondant au problème posé.

Connaissances utiles

- Groupes, sous-groupes,
- Espaces vectoriels, calcul matriciel,
- Isométries affines du plan $\mathbb{R}^2$.

Solution

Partie A

I. $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $e_1, e_2 \in \mathcal{R}$.
$X \in \mathcal{R} \Rightarrow X = ae_1 + be_2, (a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Donc $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II.1. $X = xe'_1 + ye'_2 = x\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. $(e'_1; e'_2)$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

a. Donc $e'_1, e'_2 \in \mathcal{R}$, ce qui implique $(a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$.

b. Comme $e_1, e_2 \in \mathcal{R}$, il découle de I que :
$\exists (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^4, e_1 = x_1e'_1 + y_1e'_2$ et $e_2 = x_2e'_1 + y_2e'_2$.

c. $e_1 = x_1\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1x_1 + a_2y_1 = 1 \\ b_1x_1 + b_2y_1 = 0 \end{cases}$.

$e_2 = x_2\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1x_2 + a_2y_2 = 0 \\ b_1x_2 + b_2y_2 = 1 \end{cases}$.

Comme $AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2y_1 & a_1x_2 + a_2y_2 \\ b_1x_1 + b_2y_1 & b_1x_2 + b_2y_2 \end{pmatrix}$,
on a $AB = I_2$.

d. Donc $\det(A)\det(B) = 1$. Comme $\det(A), \det(B) \in \mathbb{Z}$, il s'ensuit que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

3. a. Si $|\det(A)| = 1$, alors $\det(A) \neq 0$ et A est inversible.
Or $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$.
Donc A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

b. $e_1 = A^{-1}e'_1 = \lambda_1e'_1 + \lambda_2e'_2$ et $e_2 = A^{-1}e'_2 = \lambda'_1e'_1 + \lambda'_2e'_2$ avec $(\lambda_1\lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2) \in \mathbb{Z}^4$ car $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$. Il en est de même de e'_1, e'_2.

4. En conclusion, (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ si, et seulement si, $|\det(A)| = 1$.

III.1. Comme $\det(A) = a_1b_2 - a_2b_1 = \varepsilon \in \{-1, 1\}$, on a $a_1(\varepsilon b_2) + (-\varepsilon a_2)b_1 = 1$.
On déduit du théorème de Bézout que a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

2. Si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1u + b_1v = 1$.
La matrice $\begin{pmatrix} a_1 & -v \\ b_1 & u \end{pmatrix}$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de déterminant égal à 1.

Donc $e'_2 = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$ et e'_1, e'_2 est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ d'après II.

3. $a_1 = 7$ et $b_1 = 10$. Comme $3 \times 7 - 2 \times 10 = 1$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est le deuxième vecteur d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

Partie B

I. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R} \iff f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$ si, et seulement si, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

II. On suppose $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

1. $\big(f(e_1), f(e_2)\big)$ est libre sinon $f(\mathcal{R}) \neq \mathcal{R}$.

2. Or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. On déduit de II.1. que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ *i.e.* f est surjective. Comme f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il s'ensuit que f est bijective.

3. $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{R}) \subset f^{-1}\big(f(\mathcal{R})\big) \subset \mathcal{R}$.

4. Comme f est bijective et comme $A = M_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice A est inversible.
Donc $f^{-1}(e_1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et $f^{-1}(e_2) = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2$ où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_1, \alpha'_2) \in \mathbb{Z}^4$. Donc A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

5. Comme A et A^{-1} sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$, il en est de même de $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$. Or $AA^{-1} = I_2 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Donc $|\det(A)| = 1$.

III. 1. A.II.3. et $|\det(A)| = 1$ impliquent $(e'_1, e'_2) = (f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

2. Or $(f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $f(\mathcal{R})$, donc $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. En conclusion, $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ si, et seulement si, A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $|\det(A)| = 1$.

Partie C

I. Notons $(\mathcal{I}_s(\mathbb{R}^2), \circ)$ le groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^2$.
Montrons que G est un sous-groupe de $(\mathcal{I}_s(\mathbb{R}^2), \circ)$.
G est non vide puisque $Id_{\mathbb{R}^2} \in G$.
Si $(f, g) \in G^2$, alors $f \circ g \in \mathcal{I}_s(\mathbb{R}^2), f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} = g(\mathcal{R})$. Donc $f \circ g(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.
$f^{-1} \in \mathcal{I}_s(\mathbb{R}^2), f^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ d'après B.II.3. D'après B.II.5. $\det(f^{-1}) \in \{-1, 1\}\cdot$
On déduit de B.I. que la matrice de f^{-1} a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
D'après B.II.2. $f^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. On déduit de la caractérisation des sous-groupes que G est un sous-groupe de $(\mathcal{I}_s(\mathbb{R}^2), \circ)$.

Montrons que G_0 est un sous-groupe de G.

G_0 est non vide puisque $Id_{\mathbb{R}^2} \in G_0$.
Si $(f, g) \in G_0^2$ alors $(f, g) \in G^2$ et $f(O) = g(O) = O \Rightarrow f^{-1} \circ g(O) = O$.
Comme $f^{-1} \circ g \in G$, on a $f^{-1} \circ g \in G_0$. On déduit de la caractérisation des sous-groupes, que G_0 est un sous-groupe de $(G, \circ)$.

II. 1. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$. On a $d(O, X) = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$. Comme $x, y \in \mathbb{Z}$,
$x^2 + y^2 = 1 \iff \big(x \in \{-1, 1\}$ et $y = 0\big)$ ou $\big(y \in \{-1, 1\}$ et $x = 0\big)$.
D'où les points solutions : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.