Chapitre 1

Suites numériques

« Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Leopold Kronecker (1823–1891)

L'ensemble des nombres entiers, bien que très simple de prime abord, ne se définit pas aisément. Il a fallu attendre la fin du XIXe siècle pour que soit énoncée par Peano une première axiomatique [1] des nombres entiers. Avant cela, comme l'illustre la citation, les nombres entiers étaient considérés comme donnés a priori.
L'étude des suites numériques est inhérente à celle des nombres entiers. En effet, une suite peut se voir comme le fait d'associer à chaque nombre entier un unique nombre.
Les applications des suites sont très nombreuses. En effet, en pratique, la seule chose qu'est capable de faire une machine, c'est un nombre entier d'opérations. Ainsi, très souvent les algorithmes produiront des suites de nombres.
Pour illustrer cette dernière notion prenons un exemple : la division euclidienne. Supposons que l'on demande à un enfant de calculer la 24e décimale de $\frac{1}{7}$. Il va poser l'opération de division euclidienne et par étapes successives va trouver l'approximation par défaut de $\frac{1}{7}$ à la 24e décimale. Il aura donc construit une suite d'approximations de plus en plus fines de $\frac{1}{7}$. Cette suite peut s'écrire [2] :
$0,1 \quad 0,14 \quad 0,142 \quad 0,1428 \quad 0,14285 \quad 0,142857 \quad \cdots \quad 0,142857142857142857142857$

1. C'est un ensemble de propositions élémentaires données pour vraies et qui servent à construire une théorie.
2. Si l'enfant est rusé, il aura sûrement remarqué que les décimales se répètent et il pourra donc donner le résultat rapidement.

1.1 La récurrence

La propriété de récurrence [3] ne se démontre pas, elle est inhérente à la construction des nombres entiers non traitée ici.
Pour pouvoir suivre ce cours, il faudra avoir à l'esprit les notions abordées en première sur les suites.

1.1.1 L'axiome de récurrence

1.1.1.1 Un exemple

L'an dernier, on a dit qu'une suite u était arithmétique lorsque pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ était constant. On a alors appelé « raison de la suite » cette constante. Puis on a énoncé la propriété suivante concernant une suite arithmétique de raison a :
« Pour tout entier n, $u_n = u_0 + na$. »
Si on veut démontrer cette propriété, on doit la démontrer en théorie pour chaque entier $n = 0$ puis $n = 1$ et ainsi de suite. Mais en fait il suffit de montrer qu'elle se « propage » d'entier en entier et de vérifier qu'elle est bien vraie pour $n = 0$ pour réussir à la démontrer pour tous les entiers. Ce principe s'appelle la récurrence.
En voilà les étapes :

1. On vérifie que pour $n = 0$ la propriété est vraie :
   On a bien $u_0 = u_0 + 0 \times a$.
2. On suppose la propriété vraie pour un rang p et on cherche à démontrer alors qu'elle est vraie au rang $p + 1$:
   On suppose qu'on a bien $u_p = u_0 + pa$. Mais on sait que $u_{p+1} = u_p + a$ or, par hypothèse, $u_p = u_0 + pa$. On obtient donc $u_{p+1} = u_0 + pa + a = u_0 + (p + 1)a$, ce qui correspond bien à la formule énoncée au rang $p + 1$. La propriété est donc démontrée au rang $p + 1$.

Ainsi, par « propagation » , elle est vraie pour tout entier n.
Officiellement, on parlera d'*hérédité* et non de propagation mais ce mot traduit la même idée que l'on peut illustrer par une image : si on considère une caractéristique génétique, que l'on imagine que cette caractéristique est présente dans une population et est héréditaire alors on en déduit qu'elle sera présente dans les générations futures de la population.

3. On dit que la propriété de récurrence est un axiome des nombres entiers.

1.1.1.2 Principe de récurrence

Axiome : Principe de récurrence
Soit une suite de propriétés $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour montrer que P_n *est vraie pour tout entier* n, *il suffit de montrer que :*
(Initialisation) P_0 *est vraie.*
(Hérédité) Pour tout entier n, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

1.1.2 Applications

Les applications seront traitées sous forme d'exercices.

✐ ***Exercice 0***

Soient b *et* q *deux nombres et soit une suite* u *définie par* $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & b \\ u_{n+1} & = & qu_n \end{array}\right.$

1. *Comment appelle-t-on une telle suite ?*
2. *Rappeler, pour tout* n, *la formule explicite de* u_n.
3. *Démontrer cette formule en s'inspirant de l'exemple de la suite arithmétique.*

✐ ***Exercice 1***

Soit la suite u *définie par* $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 9 \\ u_{n+1} & = & 10u_n + 9 \end{array}\right.$

1. *Calculer les 5 premiers termes de la suite.*
2. *Prouver par récurrence que, pour tout entier* n,
   $u_n = 10^{n+1} - 1$

✐ ***Exercice 2***

☆ *Soit un nombre* a *positif. Montrer que, pour tout entier* n *:*

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

1.2 Sens de variation, limites, majorants

La section qui suit présente un certain nombre de notions dont on a déjà une approche intuitive mais que l'on cherche à formaliser [4].

4. C'est à dire à définir avec rigueur, sans ambigüité.

1.2.1 Sens de variation

Quand on mentionne le sens de variation d'une suite, on le fait toujours à partir d'un certain rang (et jusqu'à l'infini). On ne mentionnera par exemple jamais qu'une suite décroît pour les 10 premiers termes puis croît pour les 20 suivants. On rappelle plus bas et on enrichit les notions de sens de variation de suites numériques :

Définition : Suite croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante à partir d'un certain rang

Soient une suite u et un nombre entier p.
On dit que u est croissante à partir du rang p lorsque $\forall n \geq p, u_n \leq u_{n+1}$.
On dit que u est strictement croissante à partir du rang p lorsque $\forall n \geq p$, $u_n < u_{n+1}$.
On dit que u est décroissante à partir du rang p lorsque $\forall n \geq p, u_n \geq u_{n+1}$.
On dit que u est strictement décroissante à partir du rang p lorsque $\forall n \geq p$, $u_n > u_{n+1}$.

Le contraire de u est croissante n'est pas u est décroissante. En effet, il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Exercice 3

Dans les cas suivants, conjecturer puis prouver les sens de variation des suites.

a) $\forall n$, $u_n = -(n-3)^2 + 1$.

b) $\forall n$, $v_n = \dfrac{3n+2}{n - \frac{5}{2}}$.

c) $\left\{ \begin{array}{lcl} w_0 & = & 1 \\ w_{n+1} & = & 2w_n + 1 \quad , \forall n \end{array} \right.$

d) *t est une suite arithmétique de raison strictement positive.*

e) *s est une suite géométrique de raison appartenant à l'intervalle $]0;1[$ et de premier terme négatif.*

Indication: On pourra se souvenir des notions sur les fonctions trinomiales et sur la dérivation.

1.2.2 Construction graphique pas à pas d'une suite définie par une formule du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit une fonction f et une suite u définie par son premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Pour construire graphiquement une telle suite, on suit les étapes suivantes :

(Étape 0) On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ et la droite D d'équation $y = x$.

(Étape 1) On place le point A_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0.
On note que l'ordonnée de A_0 est $f(u_0)$, c'est-à-dire u_1.

(Étape 2) On place le point B_0 sur la droite D telle que les ordonnées de B_0 et A_0 sont confondues.
On note que l'abscisse de B_0 est u_1 puisque l'ordonnée de B_0 est u_1 et que la droite D est constituée de l'ensemble des points tels que $y = x$.

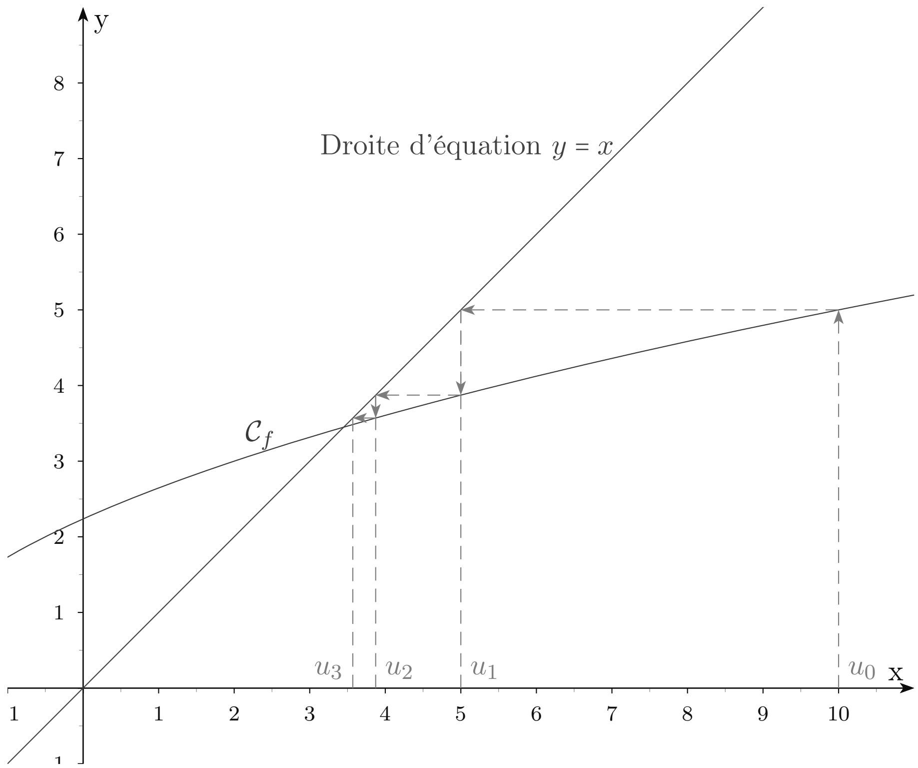
(Étape 3) On place le point A_1 de $\mathcal{C}_f$ qui a la même abscisse que B_0.

(Étape 4) On répète les 2 étapes précédentes en boucle.

Par exemple, on définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 10 \\ u_1 & = & \sqrt{2u_n + 5} \end{cases}$$

Cette suite est bien définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie pour tout $x \in [-\frac{5}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+5}$.
Il faut tout de même vérifier que u_n existe pour tout entier n. Il s'agit donc de poser et montrer l'hypothèse suivante : « Pour tout n, u_n existe et est supérieure à 0. »
L'hypothèse est vraie au rang 0 car $10 \geq 0$ donc l'hypothèse est initialisée.
On cherche à prouver l'hérédité : on suppose donc l'hypothèse vraie au rang p. Ainsi, $2u_p + 5 \geq 2 \times 0 + 5 \geq 0$. En particulier $\sqrt{2u_p + 5}$ existe et est positive donc u_{p+1} existe et est positive. L'hypothèse est donc vraie au rang $p + 1$.
Maintenant, il faut tracer la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ pour faire la construction graphique.



Une petite application pour vérifier si le principe est compris.

Exercice 4

En choisissant un repère bien adapté, faire la construction graphique pas à pas des 4 premiers termes de la suite

$$\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & -\dfrac{u_n}{3} + 2 \end{cases}$$

1.2.3 Limites

1.2.3.1 Un tout petit peu de logique avant de commencer

À travers les notions qui suivent, on énonce des propositions faisant intervenir des notions sur les intervalles et sur les quantificateurs. Un petit rappel ne fera pas de mal.

Au sujet des intervalles, dire que $x \in]\alpha; \beta[$ est équivalent à dire que $\alpha < x < \beta$.

De même, dire que $x \in]A; +\infty[$ peut aussi s'écrire $x > A$.

Enfin, dire que l'intervalle I est inclus dans l'intervalle J signifie que $x \in I \Rightarrow x \in J$.
Au sujet des quantificateurs, on rappelle qu'il existe deux types de quantificateurs : l'universel qui s'écrit « $\forall$ » , « pour tout » ,« quel que soit » ou « soit » , et l'existentiel qui s'écrit « $\exists$ » ou « il existe ».
Quand on écrit la phrase « Dans toutes les classes, il existe au moins un élève qui porte un T-shirt blanc ou noir. » , son contraire logique s'écrit « Il existe une classe dans laquelle tous les élèves ne portent ni un T-shirt blanc, ni un T-shirt noir » ou plutôt, dans un français moins maladroit « Il existe une classe dans laquelle aucun élève ne porte de T-shirt blanc ou noir. ». Le fait de prendre le contraire logique transforme les quantificateurs universels en quantificateurs existentiels et réciproquement mais cela ne change pas l'ensemble auquel appartient l'objet de la proposition. Concrètement, le contraire de « la nuit tous les chats sont gris » n'est pas « le jour tous les chiens sont noirs » car cette dernière proposition ne contredit pas en tout point la proposition portant sur les chats. Le contraire de « la nuit, tous les chats sont gris » sera « la nuit, il existe un chat qui n'est pas gris ».

Exercice 5

Compléter les pointillés pour rendre la phrase vraie :

a) $x \notin]-\infty;-1[\iff x \in \dots\dots\dots$

b) $x \in]-2;-1[\iff x < \dots\dots\dots\dots\dots\dots x > \dots\dots\dots$

c) $x \in]-2;+\infty[\cap]-4;15] \iff x \in \dots\dots\dots$

d) $x \in]-\infty;-1[\cup [-2;3[\iff x \in \dots\dots\dots$

Exercice 6

Écrire le contraire logique des phrases suivantes :

a) Tous les chemins mènent à Rome.

b) Tous les assassins reviennent à un moment ou à un autre sur les lieux du crime.

c) Pour tout nombre entier p, il existe un nombre premier q supérieur à p.

d) Pour tout nombre A, il existe un nombre entier N tel que, pour tout nombre entier $n \geq N$, on a $u_n \in]-\infty;A[$.

1.2.3.2 Limite finie

On a vu l'an dernier des suites permettant d'obtenir des approximations de nombres remarquables tels que π, $\sqrt{2}$.
Avant de se lancer dans une définition officielle de cette notion d'approximation par une suite, il faut s'entraîner à conjecturer quelques limites.

✎ ***Exercice 7***

Soit la suite u définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

1. *Calculer les 5 premiers termes de la suite.*
2. *Vers quel nombre semble converger (s'approcher) cette suite ?*

✎ ***Exercice 8***

Soit la suite u définie par $u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est un multiple de } 3 \\ 1 + \dfrac{1}{n+1} \text{ sinon} \end{cases}$.

1. *Calculer les 7 premiers termes de la suite.*
2. *Peut-on affirmer que cette suite se rapproche indéfiniment d'un nombre ? Justifier.*

✎ ***Exercice 9***

Soit la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + 3 \times 10^{-(n+1)} \end{cases}$$

1. *Calculer les 5 premiers termes de la suite u.*
2. *Pour n devenant très grand, de quelle valeur semble se rapprocher u_n ?*
3. *Montrer par récurrence que « Pour tout entier n, $1 = 3u_n + 10^{-n}$. »*
4. *En déduire que, pour tout n, $\frac{1}{3} - u_n = \frac{10^{-n}}{3}$.*

On dira qu'une suite u a pour limite l lorsqu'elle se rapproche indéfiniment de l lorsque n augmente. Reste à définir ce que l'on entend par « se rapprocher indéfiniment de l lorsque n augmente » à l'aide de quantificateurs mathématiques.