# Chapitre 1

# Nombres complexes

## 1.1 Choisir une représentation d'un nombre complexe

On dispose de plusieurs façons de représenter les nombres complexes, qui donnent autant de reformulations possibles, et orientent [1] donc notre lecture du problème. Voici un tableau récapitulatif de ces différentes écritures :

| Nom | Notation standard | unicité |
|---|---|---|
| Neutre | z | oui |
| Algébrique | $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ | oui |
| Trigonométrique | $\rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ | de $\rho$, pas de $\theta$ |
| Géométrique | M | oui |

Étudions un peu les avantages et inconvénients comparés de ces différentes écritures.

### 1.1.1 La représentation neutre

Elle consiste simplement à représenter un nombre complexe par une lettre, en général $z$. De nombreux résultats du cours peuvent s'écrire sous forme neutre, par exemple les formules :

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|,$$

ou les caractérisations suivantes :

$$(z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}), \quad (z \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow z = |z|), \quad (z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1)$$

Les étudiants ont un peu trop tendance à vouloir s'en débarrasser, au profit de la notation algébrique.

1. en cela, une reformulation est un faux surplace.

| Avantages | Inconvénients |
|---|---|
| Concise et maniable | Nécessite une bonne pratique, et une solide connaissance des formules du cours |
| Permet les reformulations les plus neutres | Manque parfois de puissance |

***Exemple*** Soit $z, z' \in \mathbb{U}$, tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Comme $z$ et $z'$ sont de module 1, on a :

$$\frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{\dfrac{1}{\overline{z}} + \dfrac{1}{\overline{z'}}}{1 + \dfrac{1}{\overline{zz'}}} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{1+\overline{zz'}} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)},$$

donc $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

**Pour s'entraîner :** exercices 3 et 13. Voir aussi la remarque de 10.

### 1.1.2 La représentation algébrique

La grande favorite des étudiants, pas des professeurs. Elle consiste à écrire $z = a + ib$, où $a$ et $b$ sont *réels*. Les notions qui lui sont liées sont les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

$\boxed{\text{Mise en garde}}$ Lorsqu'on écrit : « soit $z = a + ib$ un nombre complexe », rien ne dit que $a+ib$ soit la forme algébrique de $z$ ! Il se peut par exemple que $a = i$ et $b = 1+2i$. Il vaut mieux donc écrire « soit $z = a+ib$ un nombre complexe mis sous (sa) forme algébrique » ou « soit $z = a + ib$ un nombre complexe $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$ ». Une notation, même standard, doit être introduite.

| Avantages | Inconvénients |
|---|---|
| Ramène l'étude des nombres complexes à une étude de (couples de) réels | Fait perdre les propriétés des nombres complexes |
| Unicité de la forme algébrique | Les calculs peuvent être très compliqués |
| Se comporte bien avec la somme | Se comporte moins bien avec le produit |

**Remarque :** elle peut être employée pour la résolution d'équations du second degré (voir 1.2.2).

**Pour s'entraîner :** exercices 3, 5 et 9.

### 1.1.3 La représentation trigonométrique

Également appelée représentation exponentielle, c'est l'une des plus utiles. Elle consiste à représenter un nombre complexe *non nul* $z$ sous la forme $\rho e^{i\theta}$, où $\rho =$

$|z| > 0$, et $\theta$ est l'un des arguments de $z$. Elle est liée aux notions de module, d'arguments d'un nombre complexe non nul, et d'exponentielle complexe.

*La notation trigonométrique est souvent le bon compromis entre les propriétés calculatoires des nombres complexes et leur interprétation géométrique.*

| Avantages | Inconvénients |
|---|---|
| Se comporte très bien avec le produit (et donc le quotient, les puissances, les racines $n$-ièmes) | Se comporte plutôt mal avec la somme |
| Unicité de $\rho$ | Non unicité de $\theta$ |
| Pratique pour les calculs trigonométriques | N'existe pas pour 0 |

**Remarque :** pour passer d'une représentation trigonométrique à une représentation algébrique, il suffit de se rappeler que

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Pour passer d'une représentation algébrique $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ à une représentation trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$, il suffit de constater que

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

On peut retenir que si $z$ n'est pas imaginaire pur, on a :

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z)}.$$

**Remarque :** la donnée d'un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique revient à la donnée de son module et d'un de ses arguments. La forme trigonométrique se comporte mieux que la forme algébrique avec le produit car pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

$$|zz'| = |z||z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi],$$

alors que

$$\mathrm{Re}\,(zz') = \mathrm{Re}\,(z)\mathrm{Re}\,(z') - \mathrm{Im}\,(z)\mathrm{Im}\,(z') \text{ et } \mathrm{Im}\,(zz') = \mathrm{Re}\,(z)\mathrm{Im}\,(z') + \mathrm{Im}\,(z)\mathrm{Re}\,(z').$$

Dans le premier cas, modules et arguments font leur vie séparément, mais dans le second, parties réelles et imaginaires sont mêlées. Voilà pourquoi il est préférable (si possible) d'utiliser cette représentation trigonométrique lorsque produits, quotients, puissances, racines $n$-ièmes interviennent.

---

***Exemple*** Mettre le nombre complexe

$$z = \frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3}$$

sous forme trigonométrique.

---

En tenant compte de la remarque précédente, la manière dont $z$ est donné nous conduit à d'abord se concentrer sur les nombres complexes $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$[2]. En factorisant par le module, on doit trouver des réels $\theta_1$ et $\theta_2$ tels que :

$$z_1 = 2e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\theta_2}.$$

On peut par exemple prendre $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$ et $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Ainsi,

$$z = \frac{\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3} = \frac{2^5}{2\sqrt{2}}e^{-i\pi\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{4}\right)} = 8\sqrt{2}e^{-i\pi\frac{11}{12}}$$

Comme nous l'avons dit, la notation exponentielle se comporte plutôt mal avec la somme. Cependant, une technique (à connaître absolument) permet de transformer avantageusement une somme en un produit :

**Méthode : Lorsqu'on considère une expression du type $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$, on a souvent avantage à factoriser par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.**

---

***Exemple*** Soit $\theta$ et $\theta'$ deux réels.
Lier $\cos(\theta)$, $\cos(\theta')$, $\cos((\theta+\theta')/2)$ et $\cos((\theta-\theta')/2)$ par une formule.

---

On peut écrire

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

En égalant les parties réelles,

$$\boxed{\cos(\theta) + \cos(\theta') = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right).}$$

Mise en garde $2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ n'est pas forcément la forme trigonométrique de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$, car il n'est pas sûr que $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$ soit strictement positif.

**Pour s'entraîner :** exercices 1, 4, 5 (dernière question), 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

### 1.1.4 La représentation géométrique

Elle consiste simplement à considérer l'image de $z$ dans le plan euclidien. Elle est liée aux notions d'affixe d'un point du plan, et d'image d'un nombre complexe.

| Avantages | Inconvénients |
|---|---|
| Permet de mobiliser son intuition géométrique | Le produit ne s'y interprète pas simplement |

**Pour s'entraîner :** exercices 2, 3, 10.

2. que l'on peut « par chance » facilement mettre sous forme trigonométrique.

## 1.2 Résoudre une équation algébrique simple

### 1.2.1 Trouver une racine carrée sous forme algébrique

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe mis sous forme algébrique. On suppose $b$ non nul (le cas où $b = 0$ est le cas réel, connu depuis belle lurette). On cherche un nombre complexe $w = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), tel que $w^2 = z$ (nous savons qu'il en existe exactement deux). Pour ce faire, on utilise la méthode suivante :

**Méthode :**

- **i) Égaler les parties réelles (de $w^2$ et $z$) : $x^2 - y^2 = a$ ;**
- **ii) Égaler les modules (de $w^2$ et $z$) : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;**
- **iii) En déduire $x^2$ et $y^2$, puis $x$ et $y$ au signe près ;**
- **iv) Égaler les parties imaginaires (de $w^2$ et $z$) : $2xy = b$, pour déterminer si $x$ et $y$ ont même signe ;**
- **v) Donner les deux valeurs possibles (opposées) de $w$.**

**Remarques :**

- Le théorème fondamental de l'algèbre atteste l'existence de deux racines carrées distinctes, et la phase de synthèse (vérifier que les deux valeurs trouvées conviennent) est donc ici implicite.
- Si $z = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe non nul mis sous forme trigonométrique, alors ses racines carrées sont $\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$ et $\sqrt{\rho} e^{i(\pi + \theta/2)}$. Plus généralement, il est aisé de trouver les racines $n$-ièmes d'un nombre complexe (non nul) mis sous forme trigonométrique[3], voir 1.2.3.

---

***Exemple*** Donner les racines carrées de $5 + 12i$.

---

On cherche ces racines carrées sous forme algébrique $w = x + iy$. On a donc, en égalant les parties réelles, $x^2 - y^2 = 5$ et, en égalant les modules, $x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. On obtient alors $x^2 = 9$ et $y^2 = 4$, soit $x = \pm 3$ et $y = \pm 2$. En égalant les parties imaginaires, on obtient $2xy = 12$ : $x$ et $y$ ont donc même signe. Par conséquent, $3 + 2i$ et $-(3 + 2i)$ sont les deux racines carrées de $5 + 12i$.

**Pour s'entraîner :** exercice 5.

### 1.2.2 Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes

La forme algébrique d'un nombre complexe est assez bien adaptée à la résolution d'équations algébriques du second degré. On considère une équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue complexe $z$, où $a, b, c$ sont des nombres complexes, $a \neq 0$. Pour résoudre cette équation, voici la procédure générale :

3. mais il n'est pas toujours aisé de mettre un nombre sous forme trigonométrique, par exemple $3 + 4i$, d'argument $\arccos(3/5)$ ...

**Méthode : Pour déterminer les solutions de l'équation**

$$az^2 + bz + c = 0,$$

i) **Calculer le discriminant $\Delta$ de l'équation :**

$$\Delta = b^2 - 4ac\ ;$$

ii) **Déterminer un complexe $\delta$ tel que $\delta^2 = \Delta$ grâce à la méthode précédente ;**

iii) **Donner les solutions $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$ (qui sont égales si $\Delta = 0$).**

**Remarque :** il est parfois préférable de résoudre l'équation (équivalente) $z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$ (voir par exemple la deuxième question de l'exercice 5).

Mise en garde N'écrivez pas $\sqrt{\Delta}$ ni $\Delta^{\frac{1}{2}}$, sauf dans le cas où $\Delta$ est un réel positif ou nul.

Mise en garde Il est maladroit d'utiliser cette méthode si l'équation a des solutions évidentes. Par exemple, n'utilisez pas cette méthode pour résoudre l'équation $z^2 + (3+i)z = 0$ (ou $z^2 - 2z + 1 = 0$).

***Exemple*** Déterminer les racines de $X^2 + (1+4i)X - 5 - i$.

Ce polynôme n'admet pas de racine évidente, nous utilisons donc la méthode ci-dessus. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (1+4i)^2 - 4(-5-i) = 5+12i$. L'exemple précédent nous informe que $\delta = 3+2i$ est de carré $\Delta$. Ainsi, les deux racines de ce polynôme sont

$$\frac{-(1+4i)+3+2i}{2} = \boxed{1-i} \quad \text{et} \quad \frac{-(1+4i)-(3+2i)}{2} = \boxed{-2-3i.}$$

**Pour s'entraîner :** exercices 5, 9.

### 1.2.3 Déterminer les racines $n$-ièmes d'un nombre complexe

L'écriture algébrique n'est pas vraiment adaptée à la recherche des racines $n$-ièmes d'un nombre complexe non nul [4] si $n \geqslant 3$ : c'est l'écriture exponentielle qui est ici la plus efficace.

Rappelons que si $n \geqslant 3$ et $z = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe non nul mis sous forme exponentielle, alors l'ensemble des racines $n$-ièmes de $z$ est

$$\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in [\![1, n]\!]\},$$

4. l'écriture algébrique nous a permis de trouver les racines carrées d'un nombre complexe. Nous pourrions réitérer ce procédé pour trouver les racines quatrièmes, puis les racines 8-ièmes, etc. d'un nombre complexe non nul. Cependant, cette méthode serait pour le moins fastidieuse, et ne règlerait même pas le cas des racines cubiques d'un nombre complexe.

ou encore $\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

**Remarque :** si $y_0$ est une racine $n$-ième de $z$, alors les racines $n$-ièmes de $z$ sont les multiples de $y_0$ par une racine $n$-ième de l'unité.

---

***Exemple*** Soit $n \geqslant 2$, $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la somme des racines $n$-ièmes de $z$ est nulle.

---

Si $z$ est nul, le résultat est clair. Sinon, mettons $z$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$. Notons $S$ la somme des racines $n$-ièmes de $z$. D'après le rappel :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}\right)$$

Comme $e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta}{n}} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k$ (pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$), on peut écrire

$$S = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k.$$

Comme $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ (puisque $n \geqslant 2$), on a :

$$S = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.$$

**Pour s'entraîner :** exercices 5 (dernière question), 9, 11.

# 1.3 Retrouver des formules de trigonométrie

## 1.3.1 Retrouver les formules élémentaires

Les nombres complexes permettent de retrouver bien des formules trigonométriques. Ils sont également très pratiques pour calculer des sommes trigonométriques (voir plus loin). Leur intérêt dans ce domaine est qu'ils traitent simultanément des cosinus et sinus, en les transformant par des exponentielles, en partant de l'observation élémentaire suivante : pour tout réel $\theta$,

$$\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(e^{i\theta}) = \sin(\theta).$$

Nous avons déjà vu un exemple d'obtention de formule trigonométrique en 1.1.3. Voici un autre exemple élémentaire :

---

***Exemple*** Soit $a$ et $b$ deux réels.

Retrouver les formules $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

---

Il suffit d'exprimer sous forme algébrique la relation : $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$.

### 1.3.2 Linéariser une expression polynomiale trigonométrique

Quand on étudie une expression polynomiale en cosinus et sinus, il est possible de la *linéariser* :

**Méthode : Pour « linéariser » une expression polynomiale en cosinus et sinus, partir des relations d'Euler**

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textbf{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

---

***Exemple*** Linéariser $\cos^4(\theta)$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

---

On part de la relation d'Euler pour cosinus :

$$\begin{aligned}
\cos^4(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left((e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3 e^{-i\theta} + 6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2 + 4e^{i\theta}(e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.}
\end{aligned}$$

**Remarque :** ce calcul utilise une formule d'Euler, mais aussi la formule de Moivre. Cependant, cette dernière n'intervient qu'en second.

**Pour s'entraîner :** exercice 4.

### 1.3.3 Opération « inverse » de la linéarisation

**Méthode : Pour transformer une expression trigonométrique « linéaire » en expression polynomiale de cosinus et sinus, partir de la formule de Moivre**

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

**($\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$).**

---

***Exemple*** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ sous la forme $\sin(\theta)P(\cos(\theta))$, où $P$ est un polynôme de degré 2 (ne dépendant pas de $\theta$).

---

$$\begin{aligned}
e^{3i\theta} &= (e^{i\theta})^3 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta))
\end{aligned}$$