

Table des matières

1	Nombres complexes	1
1.1	Choisir une représentation d'un nombre complexe	1
1.1.1	La représentation neutre	1
1.1.2	La représentation algébrique	2
1.1.3	La représentation trigonométrique	2
1.1.4	La représentation géométrique	4
1.2	Résoudre une équation algébrique simple	5
1.2.1	Trouver une racine carrée sous forme algébrique	5
1.2.2	Résoudre une équation du second degré	5
1.2.3	Déterminer les racines n -ièmes d'un nombre complexe	6
1.3	Retrouver des formules de trigonométrie	7
1.3.1	Retrouver les formules élémentaires	7
1.3.2	Linéariser une expression polynomiale trigonométrique	8
1.3.3	Opération « inverse » de la linéarisation	8
1.3.4	Simplifier une somme trigonométrique	9
1.4	Exercices	10
1.4.1	Entraînement	10
1.4.2	Perfectionnement	15
2	Fonctions usuelles	21
2.1	Montrer une formule	21
2.2	Simplifier une expression ou résoudre une équation	22
2.3	Vérifier une relation	23
2.4	Exercices	25
2.4.1	Entraînement	25
2.4.2	Perfectionnement	27
2.5	Problème : formules pour tangente et arctangente	32
3	Géométrie dans le plan ou l'espace	37
3.1	Applications multilinéaires classiques dans le plan ou l'espace	37
3.2	Déterminer une équation d'un sous-espace affine	39
3.3	D'une équation cartésienne à une équation paramétrique	40
3.4	Calcul de distance, de perpendiculaire commune	42
3.5	Déterminer un lieu	43
3.6	Exercices	46
3.6.1	Entraînement	46
3.6.2	Perfectionnement	51

3.7	Problème : inversion et points rationnels sur un cercle	57
4	Équations différentielles	63
4.1	Résolution d'une équation différentielle standard	63
4.1.1	Définir un plan d'étude	63
4.1.2	Résolution de l'équation homogène associée	65
4.1.3	Recherche d'une solution particulière	66
4.2	Problème de raccord dans le cas du premier ordre	70
4.3	Se ramener à une équation différentielle	72
4.4	Exercices	74
4.4.1	Entraînement	74
4.4.2	Perfectionnement	80
4.5	Problème : d'une solution à une solution paire ou impaire	84
5	Structures algébriques, arithmétique	89
5.1	Utiliser la notion de sous-structure	89
5.2	Utiliser la notion de morphisme	91
5.3	Étudier une isomorphie	93
5.4	Étude de la structure de groupe	94
5.4.1	Déterminer si un groupe est abélien	94
5.4.2	Calculer dans un groupe	95
5.5	Étudier la structure d'anneau	96
5.5.1	Calculer dans un anneau	96
5.5.2	Éléments simplifiables et diviseurs de zéro	97
5.6	Calculer dans un corps	97
5.7	Arithmétique	97
5.7.1	Déterminer si un nombre est premier	97
5.7.2	Étudier une divisibilité	98
5.7.3	PGCD, relation de Bézout, nombres premiers entre eux	98
5.7.4	Calculer un PPCM	99
5.8	Exercices	101
5.8.1	Entraînement	101
5.8.2	Perfectionnement	106
6	Suites	115
6.1	Quelles questions se poser sur une suite ?	115
6.1.1	La suite est-elle majorée, minorée, bornée ?	115
6.1.2	La suite est-elle monotone ?	116
6.2	Comment montrer qu'une suite admet une limite ?	117
6.2.1	Tout en déterminant sa limite	117
6.2.2	Sans déterminer sa limite	118
6.2.3	Lorsqu'on a une idée de sa limite	119
6.3	Montrer qu'une suite n'admet pas de limite	119
6.4	Comparaison locale	120
6.4.1	Les notations	120
6.4.2	L'équivalence et la somme	120
6.4.3	Composition et relations de comparaison	120
6.5	Trois manières de revenir à la définition de la convergence	121
6.6	Quelques techniques <i>ad hoc</i>	122

6.7	Suite récurrente	124
6.7.1	Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie	124
6.7.2	Préparer l'étude	124
6.7.3	Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	125
6.7.4	Déterminer un intervalle d'étude	125
6.8	Exercices	127
6.8.1	Entraînement	127
6.8.2	Perfectionnement	135
6.9	Problème : étude d'une suite récurrente	139
7	Fonctions réelles d'une variable réelle	145
7.1	Stabilité des propriétés rencontrées	145
7.2	Problème de limite	149
7.2.1	Montrer l'existence d'une limite tout en la calculant	149
7.2.2	Montrer l'existence d'une limite sans la calculer	150
7.2.3	Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite	150
7.2.4	Étudier une continuité ponctuelle	151
7.2.5	Étudier une dérivabilité ponctuelle	151
7.3	Extension d'un résultat par continuité	153
7.4	Parties stables par image continue	153
7.5	Étudier l'uniforme continuité, le caractère lipschitzien	154
7.6	Dériver sur un intervalle	155
7.6.1	Calculer une dérivée	155
7.6.2	Calculer une dérivée n -ième	156
7.7	Utiliser la dérivation sur un intervalle	157
7.8	Montrer qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^1	158
7.9	Chercher et exploiter les extrémums d'une fonction	160
7.10	Recherche de zéros ou de points fixes d'une fonction	160
7.11	Étudier une équation fonctionnelle	161
7.12	Convexité	163
7.13	Exercices sur la continuité	165
7.13.1	Entraînement	165
7.13.2	Perfectionnement	169
7.14	Exercices sur la dérivation	174
7.14.1	Entraînement	174
7.14.2	Perfectionnement	180
7.15	Quelques résultats sur l'uniforme continuité	184
7.16	Problème : taux d'accroissement d'une fonction	187
8	Espaces vectoriels	193
8.1	Exploiter le concept de linéarité	193
8.1.1	La notion de combinaison linéaire	193
8.1.2	Propriété stable par combinaison linéaire	194
8.1.3	Exemples de propriétés stables par combinaison linéaire	195
8.2	Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	196
8.2.1	Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel	196
8.2.2	Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels	196
8.2.3	Montrer qu'une partie de E en est un sous-espace vectoriel	197
8.2.4	Déterminer une dimension	198

8.3	Relations ensemblistes entre sous-espaces vectoriels	199
8.3.1	Prouver une inclusion entre sous-espaces vectoriels	199
8.3.2	Prouver une supplémentarité	200
8.4	Applications linéaires	200
8.4.1	Exemples classiques d'applications linéaires	200
8.4.2	Déterminer si une application est linéaire	202
8.4.3	Calculer le rang d'une application linéaire	203
8.4.4	Prouver l'injectivité (et autre) d'une application linéaire	203
8.4.5	Utiliser l'injectivité (et autre) d'une application linéaire	204
8.4.6	Résoudre une équation linéaire	204
8.5	Étudier une famille de vecteurs	205
8.5.1	Étudier la liberté	205
8.5.2	Montrer qu'une famille est liée	209
8.5.3	Étudier le caractère générateur	209
8.5.4	Déterminer si la famille est une base	210
8.5.5	Déterminer une base	210
8.6	Calculer dans l'anneau des endomorphismes	210
8.6.1	Que dire de deux endomorphismes commutant ?	211
8.6.2	Polynômes d'un endomorphisme	211
8.6.3	Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme	212
8.6.4	Projecteurs et symétries	213
8.7	Exercices	215
8.7.1	Entraînement	215
8.7.2	Perfectionnement	218
9	Intégration	227
9.1	Calculer une intégrale	227
9.1.1	Calculer une primitive	227
9.1.2	Calculer une intégrale	229
9.2	Inégalités intégrales	231
9.3	Étudier une suite grâce au calcul intégral	233
9.3.1	Calculer la limite d'une suite de sommes de Riemann	233
9.3.2	Calculer la limite d'une suite d'intégrales	233
9.3.3	Calculer une limite par comparaison somme-intégrale	235
9.4	Exercices	236
9.4.1	Entraînement	236
9.4.2	Perfectionnement	241
9.5	Problème de synthèse analyse : un calcul de $\zeta(2)$	247
9.6	Problème classique : intégrales de Wallis	251
10	Développements limités	255
10.1	Relations de comparaison	255
10.2	Utiliser les différentes formules de Taylor	256
10.3	Calculer un développement limité	257
10.3.1	Justifier l'existence d'un développement limité	257
10.3.2	Opérations sur les développements limités	258
10.3.3	Quelques techniques de calcul	259
10.3.4	Mise en œuvre d'un calcul de développement limité	261
10.3.5	Développer ailleurs qu'en θ	261

10.3.6	Autres méthodes d'obtention d'un développement limité . . .	263
10.4	Utilisation des développements limités	264
10.4.1	Calcul de limite, d'équivalents	265
10.4.2	Développements asymptotiques	266
10.4.3	Applications aux suites récurrentes	266
10.4.4	Application à des études graphiques	267
10.5	Exercices	268
10.5.1	Entraînement	268
10.5.2	Perfectionnement	272
11	Polynômes et fractions rationnelles	279
11.1	Étudier l'ensemble richement structuré $\mathbb{K}[X]$	279
11.1.1	Choisir une approche adaptée au problème	279
11.1.2	Montrer la nullité d'un polynôme	281
11.1.3	Montrer qu'une fonction est polynomiale (ou pas)	282
11.1.4	Montrer qu'une famille de polynômes est libre	283
11.1.5	Choisir et travailler dans une base adaptée au problème . . .	283
11.1.6	Exemples polynomiaux classiques de linéarité	285
11.2	Étudier les racines d'un polynôme	285
11.2.1	Montrer l'existence ou trouver une racine d'un polynôme . . .	285
11.2.2	Ordre de multiplicité d'une racine, polynôme scindé	287
11.2.3	Utiliser les fonctions symétriques élémentaires des racines . .	288
11.3	Étude arithmétique de $\mathbb{K}[X]$	289
11.3.1	Montrer qu'un polynôme divise un autre (ou pas)	289
11.3.2	Étudier l'irréductibilité d'un polynôme	291
11.3.3	Effectuer une division euclidienne, calculer un reste	291
11.3.4	Calculer le pgcd ou le ppcm de deux polynômes	293
11.4	Décomposition en éléments simples	295
11.4.1	Déterminer la partie entière de F	295
11.4.2	Déterminer une partie polaire	296
11.4.3	Trouver des relations entre les parties polaires	297
11.4.4	Pratique de la décomposition	297
11.5	Utilité de la décomposition en éléments simples	298
11.6	Un cas particulier important : la dérivée logarithmique	299
11.7	Exercices	300
11.7.1	Entraînement	300
11.7.2	Perfectionnement	309
12	Matrices	317
12.1	L'aspect vectoriel des matrices	317
12.1.1	Rappels	317
12.1.2	Exploiter la structure des espaces matriciels	317
12.2	Apprivoiser le produit matriciel	318
12.2.1	Défrichage	318
12.2.2	Calculer dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	318
12.2.3	Bon comportement d'applications avec le produit	319
12.3	Montrer que des matrices commutent	320
12.4	Calculer le rang d'une matrice	321
12.5	Calculer les puissances d'une matrice carrée	322

12.6	Inverse d'une matrice	324
12.6.1	Preuves constructives	325
12.6.2	Preuves non constructives	327
12.6.3	Montrer une non inversibilité	327
12.7	Résoudre un système linéaire	327
12.8	Étudier une suite récurrente linéaire	328
12.9	Matrices et changement de base	330
12.9.1	Comment se rappeler les formules de changement de base?	330
12.9.2	Comment déterminer si deux matrices sont équivalentes?	331
12.9.3	Montrer que deux matrices ne sont pas semblables	332
12.9.4	Comment montrer que deux matrices sont semblables?	333
12.10	Exercices	335
12.10.1	Entraînement	335
12.10.2	Perfectionnement	341
12.11	Problème : fonctions de matrices nilpotentes	349
12.12	Problème : sous-groupes à un paramètre de $GL_p(\mathbb{C})$	355
13	Déterminant	361
13.1	Piqûre de rappel	361
13.2	Utilité d'un déterminant	361
13.2.1	Qu'exprime la nullité d'un déterminant?	361
13.2.2	Signe d'un déterminant	362
13.2.3	Invariance du déterminant par similitude	362
13.2.4	Utiliser la comatrice	362
13.2.5	Systèmes de Cramer	363
13.2.6	Propriétés calculatoires du déterminant	363
13.2.7	Formule compliquée du déterminant	363
13.3	Comment calculer un déterminant?	364
13.4	Exercices	366
13.4.1	Entraînement	366
13.4.2	Perfectionnement	371
14	Espaces euclidiens	377
14.1	Montrer qu'une application définit un produit scalaire	377
14.1.1	Produit scalaire canonique	377
14.1.2	Produit scalaire intégral	378
14.1.3	Produit scalaire d'interpolation	379
14.1.4	Est-ce tout?	380
14.2	Qu'apporte la notion d'orthogonalité?	381
14.2.1	L'orthogonalité est stable par combinaison linéaire	381
14.2.2	De l'orthogonalité à la liberté	381
14.2.3	Supplémentaire orthogonal	381
14.2.4	Norme induite par un produit scalaire	381
14.2.5	Déterminer si un vecteur est nul	382
14.2.6	Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz	382
14.2.7	Montrer l'orthogonalité de deux vecteurs	383
14.3	Problèmes de famille	383
14.3.1	Montrer qu'une famille est une base orthogonale	383
14.3.2	Coordonnées dans une base orthonormale	384

14.3.3	Quel est l'intérêt du procédé de Schmidt ?	384
14.3.4	Trouver une base orthonormale d'un espace euclidien	385
14.4	Projetés orthogonaux et distance à un sous-espace	386
14.4.1	Déterminer un projeté orthogonal sur un sous-espace	386
14.4.2	Calculer la distance d'un point à un sous-espace	387
14.5	Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales	388
14.5.1	Généralités	388
14.5.2	Automorphismes orthogonaux du plan	389
14.5.3	Automorphismes orthogonaux dans \mathbb{R}^3 euclidien canonique	390
14.6	Isométries	393
14.6.1	Montrer qu'une application est une isométrie	393
14.7	Exercices	395
14.7.1	Entraînement	395
14.7.2	Perfectionnement	402
14.8	Problème de synthèse sur les espaces euclidiens	407