PREMIÈRE PARTIE : LE TRAITÉ DE HUYGENS

Introduction générale

Le Calcul des Probabilités avant Huygens.

Il ne s'agit pas ici de faire une histoire exhaustive de la préhistoire du calcul des probabilités, mais il est important pour comprendre la portée du texte de Huygens, de marquer les points forts de ces premiers travaux. Ils se sont cristallisés autour de deux types de problèmes : les partis et les dés.

Les problèmes des partis remontent au moins aux algébristes italiens de la Renaissance, des 15ème et 16ème siècles : Luca Pacioli en 1494 pose la question du partage de la mise entre les participants à un jeu de hasard interrompu avant la fin. Ce problème est posé d'abord de façon purement algébrique, en termes de proportions.

Les paris sur les lancers de dés sont plus anciens. On a utilisé ainsi les lancers d'une ou plusieurs astragales, puis de dés, dans des buts de divination puis de jeux d'argent. Le hasard est ainsi sollicité comme exprimant le décret d'une divinité inaccessible. Il est remarquable que ces pratiques divinatoires se soient très vite doublées d'une utilisation ludique et intéressée du hasard. Mais, dans les deux cas, le calcul n'a d'intérêt ni pour le prêtre qui ne pourrait démythifier la Fortune en observant des régularités dans l'expression du jugement de Dieu, ni pour le joueur qui ne cherche pas l'égalité, ou la répartition juste, mais qui veut gagner en forçant le hasard.

Le problème des partis et, dans une moindre mesure, celui des dés sont le champ de travail et d'exploration de la célèbre correspondance entre Fermat et Pascal de 1654. La principale avancée de Pascal sur les problèmes de partage est de développer une argumentation juridique : « *l'argent que les joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la propriété ; mais ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le hasard leur en peut donner.* […] *Le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'aventure du jeu* » (*Usage du triangle arithmétique*, 1665).

Pascal évalue le gain possible d'un joueur à un moment donné de la partie, en faisant une partition des deux éventualités pour le coup suivant. Ce qui donne une équation récurrente, qu'il résout avec une grande virtuosité technique et son fameux triangle arithmétique. Le principe de fonctionnement de la récurrence est le suivant : dans une situation à deux issues équiprobables, si dans un cas le joueur gagne a et dans l'autre b, il lui revient, dans le cas du partage, $\frac{a+b}{2}$.

Fermat fait intervenir des parties fictives, qui permettent de décrire entièrement l'ensemble de tous les cas. En supposant l'équiprobabilité de ces cas, il reste à faire un dénombrement des cas favorables à l'un des joueurs. Il s'agit donc d'un raisonnement très proche d'une méthode probabiliste finie moderne. Cette idée des parties fictives n'est pas acceptée facilement, ni par Roberval, qui y voit un paralogisme, ni finalement par Pascal. En effet, le jeu s'est effectivement arrêté.

Les deux concepts centraux qui se mettent peu à peu en place lors de ces premiers travaux sont ceux d'équiprobabilité – ou plutôt d'équité, de justice – et d'espérance. Ernest Coumet a montré comment ces problèmes de partage d'enjeu, avaient été traités d'un point de vue juridique, celui du contrat : il s'agit d'établir ce qui doit revenir à chaque joueur en toute justice. C'est donc initialement un esprit d'équité qui prévaut plutôt qu'une recherche d'égalité mathématique. Coumet a aussi montré ce que ces travaux devaient à un type d'accords juridiques devenus de plus en plus importants aux 17ème et 18ème siècles : les contrats aléatoires. Il s'agit d'organiser, dans un cadre commercial ou de navigation, l'échange d'une valeur présente et certaine contre une valeur incertaine dans l'avenir. Le problème est d'arriver à la proportion "entre le péril et ce qui est reçu", proportion qui a une importance pratique dans le cadre du développement des assurances liées par exemple aux investissements d'un armateur pour un voyage outre-mer. La quantification de cette proportion conduit à l'idée d'espérance, en tant que critère de décision, de choix raisonnable dans une situation incertaine, qui reste soumise au hasard. Pour illustrer cet état d'esprit nouveau, il suffit d'opposer la "sagesse populaire" du "un tiens vaut mieux que deux tu l'auras", à la définition de Pascal : "*L'incertitude de gagner est proportionnée à la certitude de ce qu'on hasarde selon la proportion des hasards de gain et de perte*".

Le traité de Huygens.

En 1654, date de la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat, Christiaan Huygens a 25 ans et vient de terminer ses études. Il les avait commencé avec son père, puis avec un mathématicien d'Amsterdam, Stampioen et les poursuit à Leyde, où il étudie le droit, et surtout à la nouvelle université de Breda, où il travaille sous la férule de Francis van Schooten. Huygens a publié déjà deux petits opuscules sur les quadratures, en particulier une réfutation de Grégoire de Saint Vincent, mais ce ne sont encore là que travaux d'étudiant. En 1655, il visite la France pour recevoir son doctorat de droit à l'université protestante d'Angers. A l'aller, comme au retour, il séjourne quelques mois à Paris et se lie avec les milieux mondains et savants. Il n'y rencontre ni Pascal – ce qu'il regrette –, ni Fermat – toujours à Toulouse –, ni Carcavi, mais se lie avec Mylon et rencontre Roberval. C'est sans doute à ce moment qu'il est informé du problème des partis et de l'existence des travaux des mathématiciens français, mais c'est sûrement une connaissance très partielle, puisque aucune publication n'a eu lieu. De retour en Hollande, il travaille sur le sujet, et, en 1656, écrit à van Schooten qu'il a un manuscrit sur les jeux de hasard.

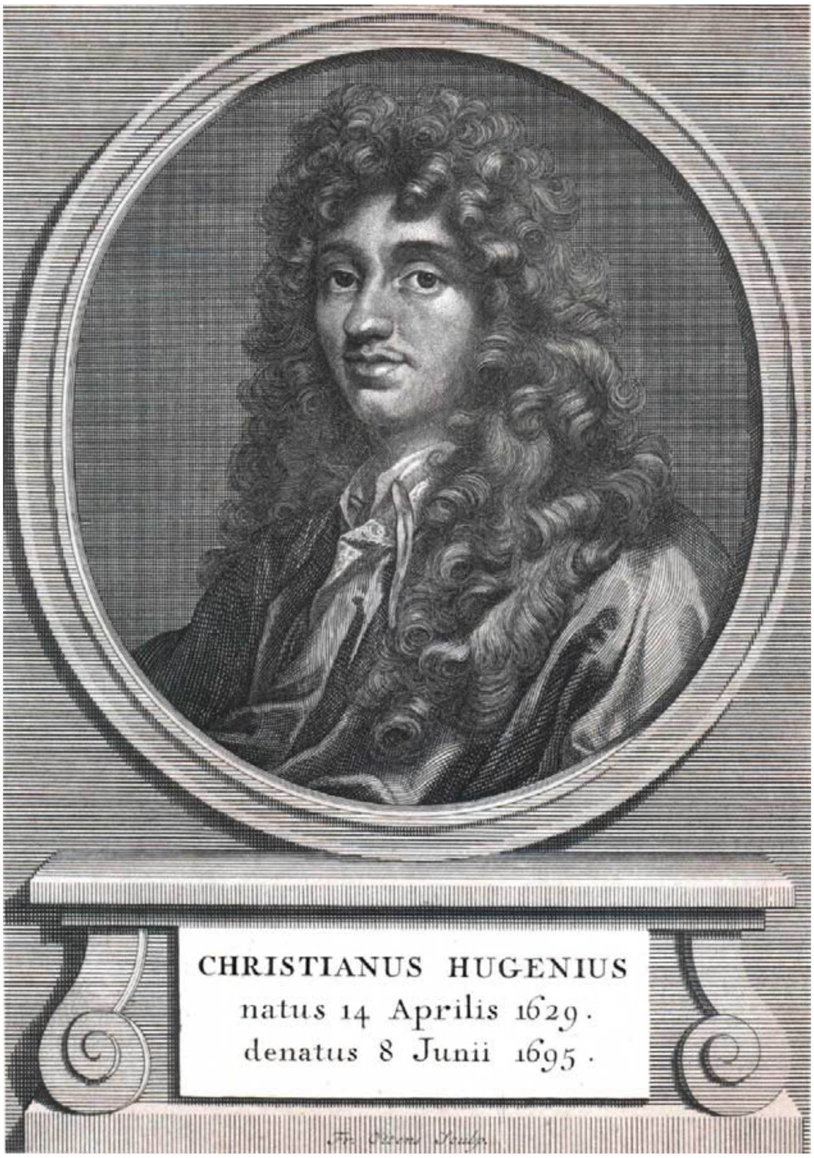
Van Schooten projette alors la publication d'un recueil d'exercices, applications de l'analyse cartésienne à divers sujets. Il propose, donc, à Huygens d'y insérer son traité. Le recueil devant paraître en latin, puis en hollandais, il faut donc traduire le texte de Huygens en latin, ce qui est fait par van Schooten. Ceci ne semble pas aisé, car sur une matière aussi nouvelle, les mots et les usages ne sont pas encore fixés.

Parallèlement à ces problèmes de traduction, Huygens poursuit une abondante correspondance avec des mathématiciens français : Roberval, Carcavi, Mylon. Il s'agit principalement d'un échange de problèmes et de solutions, plus qu'une comparaison de méthodes. Une des questions qui préoccupe Huygens est l'avantage de la primauté : quand deux joueurs jouent tour à tour suivant certaines règles, quel est l'avantage de celui qui commence ? Vers juin 1656, le problème arrive finalement à la connaissance de Pascal et de Fermat par le biais de Carcavi. Par le même canal, Fermat communique ses résultats que Huygens est bien heureux de trouver conformes aux siens. Fermat en profite pour proposer d'autres questions plus difficiles, que Huygens adjoindra à son traité, après les avoir résolus "en un après-midi". L'ouvrage paraît en août ou septembre 1657, en latin. L'édition hollandaise paraît trois ans plus tard.

Le traité, intitulé en latin *De rationiciis in ludo aleae*, en hollandais *Van rekeningh in spelen van geluck*, est traduit en français sous le titre *Du calcul dans les jeux de hasard*. Il est précédé d'une adresse au lecteur de van Schooten, où celui-ci présente le travail de Huygens comme une application de l'algèbre et plus généralement de l'analyse cartésienne.

Le traité, lui-même, commence ensuite. Il débute par une courte introduction, fixant les "éléments" sur lesquels s'est fondé Huygens, puis comporte 14 propositions et les cinq exercices terminaux. On peut y distinguer quatre parties :

* les règles du calcul qui regroupe l'introduction et les propositions I, II et III ;
* le problème des partis, propositions IV à IX ;
* les problèmes de dés, propositions X à XIV ;
* les cinq exercices.



Portrait de Christiaan Huygens

La préface et les fondements

Le traité commence par une lettre préface adressée à van Schooten. Huygens y présente son ouvrage dont la matière n'est pas si frivole qu'il y paraît. Huygens rend grâce, de manière allusive, à ses prédécesseurs, Pascal et Fermat. Il fait référence d'autre part à la correspondance qu'il a échangée sur le sujet avec divers auteurs. Ces remarques sont représentatives de la communication scientifique au milieu du 17ème siècle. Beaucoup d'échanges se passent par correspondance directe, et l'on cherche plus – sauf demande explicite – à échanger des énoncés et des résultats que des principes et des méthodes. Il n'y a pas encore de support périodique aux publications, ni de style scientifique codifié.

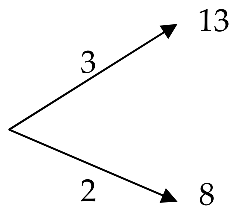
Avant d'aborder la première partie, il convient de souligner les problèmes de vocabulaire et de traduction, qui ont été étudiés en particulier par Hans Freudenthal. La question cruciale porte sur la signification du mot « chance ». On peut distinguer, en première approche, deux acceptions principales.

Huygens utilise le mot « kans » pour désigner les cas où un événement se produit. Il s'agit de l'utilisation classique, comme dans l'expression : trois chances sur quatre. Il utilise le même mot dans le cas de « chances égales » et dans les cas où il n'y a pas équiprobabilité. Van Schooten le traduit par des expressions variées comme *aeque facile*, *pari facilitate*, *aequa sors*, *simili expectatio*.

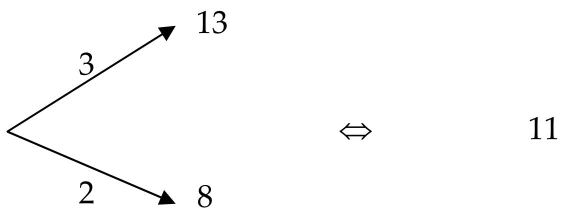
Huygens utilise le mot « kansse » pour désigner la situation globale d'un jeu, c'est-à-dire l'ensemble de tous les résultats possibles. Chaque résultat est affecté du nombre de cas où il se produit, c'est-à-dire de sa « chance » d'apparition. C'est la liste des gains possibles, accompagnés du nombre de cas où ces gains sont obtenus. En termes modernes, on dirait qu'il s'agit de la loi de probabilité d'une variable aléatoire. Huygens parle alors de la « valeur de la chance » d'un joueur pour désigner la valeur moyenne de cette situation. Selon l'interprétation de Huygens, c'est le prix qu'un joueur accepterait pour vendre sa place et quitter le jeu. En termes modernes c'est l'espérance de la variable aléatoire en question. Van Schooten traduit ce mot par *sors seu expectatio* ou *expectatio*. Les traducteurs français utiliseront le mot « sort ». C'est de là que vient notre « espérance ».

La situation du traducteur se complique quand on sait que les deux mots utilisés par Huygens « kansse » et « kans » ont le même pluriel « kanssen ».

Par exemple, soit une situation de jeu où le joueur a trois chances de gagner 13 et deux chances de gagner 8. Huygens a recours à des schémas légèrement différents de nos arbres employés en calcul des probabilités. La situation précédente sera représentée ainsi :

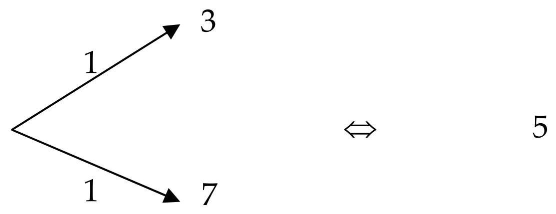


Huygens démontre que la valeur de la chance du joueur est alors de 11 $\left(=\dfrac{3\times 13+2\times 8}{3+2}\right)$. Selon lui, elle représente un prix de vente équitable de la participation au jeu : en vendant sa place dans le jeu à un autre joueur qui jouera à sa place, il est juste que le vendeur reçoive 11 de l'acheteur. La situation initiale de jeu peut alors être complètement remplacée par ce prix de vente.



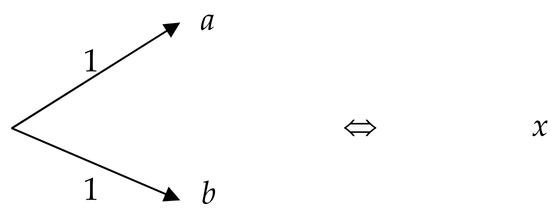
L'introduction comporte les deux définitions qui vont fonder la méthode : « *la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a une valeur déterminée*. » Il s'agit là d'une affirmation d'existence de la valeur de la chance d'un joueur, de son espérance de gain, dont nous savons qu'elle peut être sujette à démonstration dans le cas d'un jeu éventuellement infini. Huygens l'illustre avec deux exemples de jeux classiques : d'abord, « *si quelqu'un parie de jeter avec un dé six points au premier coup* », quand il s'agit de savoir de combien la chance de perdre surpasse celle de gagner. Ensuite, « *si je joue avec une autre personne à qui gagnera le premier trois parties et que j'en aie déjà gagné une* », quand il s'agit de savoir quelle part de l'enjeu me revient si on interrompt le jeu, ou bien à quel prix dois-je raisonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui désire continuer à ma place.

La deuxième définition est celle qui permettra les calculs, c'est la plus importante : « *Dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne*. » Huygens donne un exemple pour éclairer ce principe de réversibilité, qui ne sera en fait « démontré » qu'après la première proposition. Si dans une main j'ai 3 écus, et dans l'autre 7 écus, choisir « au hasard » l'une des deux mains revient à être certain d'obtenir 5 écus, c'est-à-dire de jouer au même jeu avec 5 écus dans les deux mains. Cette situation peut s'illustrer ainsi :

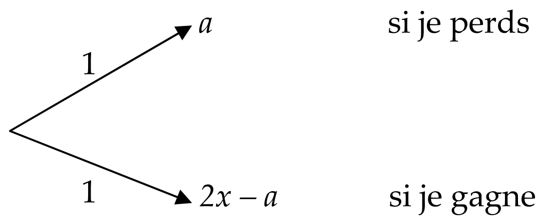


Dans les premières propositions, on peut voir à l'œuvre le principe de réversibilité de Huygens : il faut inventer un autre jeu, équitable, dont la mise doit être telle qu'elle donne la même chance (kansse), c'est-à-dire le même catalogue des gains possibles que le jeu initial. Huygens procède en trois temps : il fait d'abord l'analyse algébrique, en posant x la valeur recherchée de la chance, puis en écrivant une équation permettant de calculer x, il fait ensuite la synthèse en vérifiant que la valeur trouvée par l'analyse convient, enfin il donne un exemple « en chiffres ».

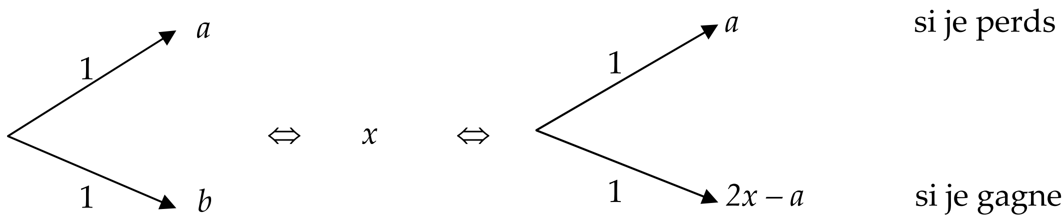
Suivons ainsi la démarche dans la première proposition dont l'énoncé est : « Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$ ». La situation de jeu peut s'illustrer ainsi :



Huygens remplace cette situation de jeu par une autre avec les mêmes cas d'apparition (kans), ici 1 contre 1, mais chaque joueur mise x et le gagnant remporte la mise $2x$ diminuée de a qu'il donne au perdant. On a donc la situation suivante :



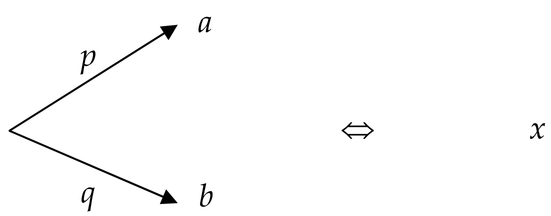
Huygens calcule ensuite x pour que la situation de jeu soit équivalente à la précédente, soit $2x - a = b$. D'où le résultat : $x = \frac{a+b}{2}$.
La découverte de la valeur de x passe donc par deux équivalences : on remplace la situation initiale par son espérance inconnue, puis on remplace cette espérance par une autre situation de jeu « équitable », c'est-à-dire où tous les joueurs ont la même table de gains, enfin on identifie les deux tables pour trouver la valeur de l'espérance.



La « preuve » consiste à vérifier que la valeur trouvée de x remplit bien les conditions du principe de réversibilité. L'exemple « en chiffres » n'est qu'une illustration numérique du principe ci-dessus.

La deuxième proposition est tout à fait semblable, si ce n'est que Huygens est obligé d'inventer un jeu équitable à trois joueurs pour trouver la valeur de l'espérance : « Avoir des chances égales d'obtenir a, b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$ ».

La proposition III est plus générale encore : « Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$ ». On a la situation suivante :



Huygens invente alors un jeu équitable à $p + q$ joueurs dont la table des gains est la même. Tous les joueurs misent x. L'enjeu total est donc $(p + q)x$. Chaque joueur a une chance de gagner la mise.