

Table des matières

PARTIE 1. ALGÈBRE

1. Structures algébriques (compléments)	13
1. Comment montrer qu'un élément d'un groupe est d'ordre fini ?	14
2. Comment montrer qu'un sous-groupe est engendré par une partie non vide ?	15
3. Comment montrer qu'un groupe est monogène ?	16
4. Comment montrer qu'un groupe est cyclique ?	17
5. Comment montrer qu'un sous-groupe d'un groupe est distingué (ou invariant) ?	18
6. Comment déterminer la signature d'une permutation ?	19
7. Comment montrer qu'un élément d'un anneau est nilpotent ?	20
8. Comment montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal ?	21
9. Comment calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?	22
2. Compléments sur les polynômes	23
1. Comment déterminer le PGCD de deux polynômes ?	24
2. Comment montrer que a est racine d'ordre k d'un polynôme ?	25
3. Comment montrer que deux polynômes sont premiers entre eux ?	26
4. Comment déterminer le PPCM de deux polynômes ?	27
5. Comment utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange ?	28
6. Comment utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme ?	29
7. Comment montrer qu'une famille de polynômes est libre ?	30
3. Déterminants et systèmes linéaires	31
1. Comment calculer un déterminant en développant selon une ligne ?	32
2. Comment calculer un déterminant en développant selon une colonne ?	33
3. Comment calculer un déterminant en utilisant des combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes ?	34
4. Comment calculer un déterminant en utilisant des mises en facteurs ?	35
5. Comment simplifier le calcul d'un déterminant ?	36
6. Comment trouver le déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n ?	37
7. Comment trouver le déterminant d'un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie ?	38
8. Comment calculer le déterminant d'une matrice triangulaire ?	39
9. Comment calculer le déterminant de Van der Monde ?	40
10. Comment résoudre un système linéaire en utilisant les déterminants ?	41
11. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée en utilisant les déterminants ?	42

4. Dualité	43
1. Comment montrer qu'une application est une forme linéaire ?	44
2. Comment montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan ?	45
3. Comment déterminer l'orthogonal (par rapport à une forme linéaire) d'un sous-espace vectoriel ?	46
4. Comment utiliser l'orthogonalité ?	47
5. Comment déterminer la base duale d'une base donnée ?	48
6. Comment déterminer la base préduale d'une base donnée ?	49
7. Comment déterminer la transposée d'une application linéaire ?	50
8. Comment trouver un sous-espace supplémentaire d'un hyperplan ?	51
9. Comment montrer qu'une famille de formes linéaires est libre dans l'espace dual d'un espace vectoriel de dimension finie ?	52
5. Réduction des endomorphismes et des matrices	53
1. Comment déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice?	54
2. Comment déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ?	55
3. Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'un endomorphisme ?	56
4. Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'une matrice?	57
5. Comment reconnaître un vecteur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice ?	58
6. Comment déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre ?	59
7. Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (1) ?	60
8. Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (2) ?	61
9. Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (3) ?	62
10. Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (4) ?	63
11. Comment déterminer le polynôme minimal d'un endomorphisme ?	64
12. Comment montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en utilisant le polynôme minimal ?	65
13. Comment diagonaliser une matrice carrée ?	66
14. Comment calculer les puissances d'une matrice diagonalisable ?	67
15. Comment résoudre certains systèmes de suites récurrentes ?	68
16. Comment résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants ?	69
17. Comment montrer qu'une matrice ou un endomorphisme est trigonalisable ?	70
6. Espaces euclidiens	71
1. Comment montrer qu'une application est un produit scalaire ?	72
2. Comment montrer l'orthogonalité de deux vecteurs, d'un vecteur et d'une partie d'un espace vectoriel ?	73
3. Comment déterminer la norme d'un vecteur ?	74
4. Comment déterminer l'angle de deux vecteurs non nuls ?	75
5. Comment utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt ?	76
6. Comment orthonormaliser une famille libre de vecteurs ?	77
7. Comment déterminer la distance entre deux vecteurs, d'un vecteur à un sous-espace vectoriel ?	78
8. Comment diagonaliser une matrice réelle symétrique ?	79
9. Comment montrer qu'un endomorphisme est un automorphisme orthogonal ?	80

10. Comment déterminer l'adjoint d'un endomorphisme ?	81
11. Comment déterminer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel ?	82
12. Comment montrer qu'un endomorphisme est une symétrie orthogonale ?	83
7. Formes bilinéaires et formes quadratiques.....	84
1. Comment montrer qu'une application est une forme bilinéaire ?	85
2. Comment montrer qu'une application est une forme quadratique ?	86
3. Comment montrer que deux vecteurs sont orthogonaux par rapport à une forme bilinéaire symétrique ?	87
4. Comment montrer que deux parties sont orthogonales par rapport à une forme bilinéaire symétrique ?	88
5. Comment déterminer l'orthogonal d'une partie par rapport à une forme bilinéaire symétrique ?	89
6. Comment montrer qu'une forme bilinéaire symétrique est non dégénérée ?	90
7. Comment montrer qu'une forme quadratique est définie ?	91
8. Comment déterminer la matrice d'une forme bilinéaire (en dimension finie) ?	92
9. Comment déterminer l'expression d'une forme bilinéaire symétrique à l'aide de sa matrice ?	93
10. Comment déterminer le discriminant d'une forme bilinéaire symétrique ?	94
11. Comment déterminer le rang d'une forme bilinéaire symétrique ?	95
12. Comment vérifier si une base est orthogonale (respectivement orthonormale) par rapport à une forme bilinéaire symétrique ?	96
13. Comment décomposer une forme quadratique en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes ?	97
14. Comment déterminer la signature d'une forme quadratique ?	98
15. Comment déterminer une base orthogonale pour une forme quadratique ?	99
16. Comment montrer que deux formes quadratiques sont équivalentes ?	100
17. Comment déterminer la matrice d'une forme bilinéaire dans une nouvelle base ?	101
8. Algèbre sesquilinéaire	103
1. Comment montrer qu'une application est une forme sesquilinéaire ?	104
2. Comment déterminer la matrice d'une forme sesquilinéaire ?	105
3. Comment déterminer le rang d'une forme sesquilinéaire ?	106
4. Comment déterminer le noyau d'une forme sesquilinéaire ?	107
5. Comment montrer qu'une application est une forme hermitienne ?	108
6. Comment montrer qu'une famille est orthonormée pour une forme hermitienne ?	109
7. Comment montrer qu'une matrice est hermitienne ?	110
8. Comment déterminer l'adjoint d'un endomorphisme dans un espace hermitien ?	111
9. Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace hermitien est autoadjoint ?	112
10. Comment réduire une forme hermitienne ?	113
11. Comment déterminer la signature d'une forme hermitienne ?	114
12. Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace hermitien est normal ?	115
9. Coniques	117
1. Comment déterminer une équation cartésienne d'une conique ?	118
2. Comment mettre en place une parabole à partir d'une équation cartésienne ?	119
3. Comment mettre en place une ellipse à partir d'une équation cartésienne ?	120
4. Comment mettre en place une hyperbole à partir d'une équation cartésienne ?	121
5. Comment réduire l'équation cartésienne d'une conique ?	122
6. Comment déterminer la nature d'une conique sans en réduire l'équation ?	123

PARTIE 2. ANALYSE

10. Notions de topologie.....	127
1. Comment montrer qu'une application d'un espace vectoriel dans \mathbf{R} est une norme ?	128
2. Comment montrer que deux normes définies sur un espace vectoriel sont équivalentes ?	129
3. Comment montrer qu'une partie d'un espace vectoriel normé est bornée ?	130
4. Comment montrer la convergence d'une suite dans \mathbf{R}^p avec $p \in \mathbf{N}^*$?	131
5. Comment montrer la continuité d'une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^q avec $p, q \in \mathbf{N}^*$?	132
6. Comment montrer qu'une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^q admette une limite en un point de \mathbf{R}^p ?	133
7. Comment montrer qu'une partie de \mathbf{R}^p avec $p \in \mathbf{N}^*$ est fermée ?	134
8. Comment montrer qu'une partie de \mathbf{R}^p avec $p \in \mathbf{N}^*$ est ouverte ?	135
9. Comment montrer qu'une partie de \mathbf{R}^p avec $p \in \mathbf{N}^*$ est compacte ?	136
11. Fonctions de plusieurs variables réelles.....	137
1. Comment calculer les dérivées partielles d'une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R} ?	138
2. Comment calculer la dérivée suivant un vecteur non nul ?	139
3. Comment montrer qu'une fonction de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}^q est de classe C^1 ?	140
4. Comment montrer la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables réelles ?	141
5. Comment déterminer la matrice jacobienne d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p ?	142
6. Comment calculer les dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables ?	143
7. Comment déterminer les dérivées partielles d'ordre supérieur ?	144
8. Comment déterminer les extrema d'une fonction de 2 variables réelles ?	145
9. Comment déterminer les extrema d'une fonction de n variables réelles ?	146
12. Intégrales généralisées.....	147
1. Comment montrer la convergence d'une intégrale généralisée en utilisant la définition ?	148
2. Comment montrer l'absolue convergence d'une intégrale généralisée ?	149
3. Comment montrer la convergence d'une intégrale généralisée en utilisant l'absolue convergence ?	150
4. Comment montrer la convergence d'une intégrale généralisée (au voisinage de l'infini) en utilisant les intégrales de référence ?	151
5. Comment montrer la convergence d'une intégrale généralisée (au voisinage de 0) en utilisant les intégrales de référence ?	152
6. Comment montrer la convergence d'une intégrale généralisée en utilisant les règles de comparaison ?	153
7. Comment montrer la convergence d'une intégrale généralisée en utilisant la règle $x^\alpha f(x)$?	154
8. Comment montrer la divergence d'une intégrale généralisée en utilisant la règle $x^\alpha f(x)$?	155
9. Comment étudier la convergence d'une intégrale généralisée en utilisant la règle $(b-x)^\alpha f(x)$?	156
10. Comment étudier la convergence d'une intégrale généralisée en utilisant la règle $(x-a)^\alpha f(x)$?	157

13. Séries numériques	159
1. Comment montrer la convergence d'une série en utilisant les séries de référence ?	160
2. Comment montrer la convergence d'une série en utilisant la transformation d'Abel ?	161
3. Comment calculer la somme d'une série de terme général $\frac{P(n)}{n!}$?	162
4. Comment montrer la convergence d'une série en comparant avec une intégrale ?	163
5. Comment montrer la divergence de certaines séries ?	164
6. Comment montrer la convergence d'une série en utilisant les séries alternées ?	165
7. Comment étudier la convergence d'une série en utilisant un développement limité du terme général ?	166
8. Comment montrer la convergence d'une série à termes positifs en utilisant la règle de d'Alembert ?	167
9. Comment calculer la somme d'une série de terme général $u_n = a_{n+1} - a_n$?	168
10. Comment montrer la convergence d'une série à termes positifs en utilisant la règle de Cauchy ?	169
11. Comment montrer la convergence d'une série en utilisant l'absolue convergence ?	170
12. Comment montrer la convergence d'une série en utilisant la suite $(n^{\alpha} u_n)_n$?	171
13. Comment étudier la convergence d'une série de terme général $a_n \cos(nx)$ ou $a_n \sin(nx)$?	172
14. Comment étudier la convergence d'une série à termes positifs en utilisant les équivalents ?	173
14. Suites de fonctions.....	175
1. Comment montrer qu'une suite de fonctions converge simplement vers une autre fonction ?	176
2. Comment montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions en utilisant la définition ?	177
3. Comment montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en utilisant les suites numériques ?	178
4. Comment montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément en utilisant la définition ?	179
5. Comment montrer la non convergence uniforme d'une suite de fonctions continues en utilisant la continuité ?	180
6. Comment montrer la non convergence uniforme d'une suite de fonctions continues en utilisant l'intégration ?	181
15. Séries de fonctions	183
1. Comment montrer la convergence normale d'une série de fonctions ?	184
2. Comment montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions ?	185
3. Comment montrer la convergence simple d'une série de fonctions ?	186
4. Comment montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions en majorant le reste ?	187
5. Comment montrer la non convergence uniforme d'une série de fonctions en utilisant la continuité ?	188
6. Comment montrer la continuité de la somme d'une série de fonctions continues ?	189
16. Séries entières.....	191
1. Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière en utilisant la définition ?	192
2. Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière en utilisant la règle de d'Alembert ?	193

3. Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière en utilisant la règle de Cauchy ?	194
4. Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière en utilisant les équivalents ?	195
5. Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière en utilisant les opérations (dérivation, intégration,...) ?	196
6. Comment montrer qu'une fonction est développable en série entière ?	197
7. Comment montrer qu'une fonction est développable en série entière en se ramenant aux fonctions usuelles ?	198
8. Comment montrer qu'une fonction est développable en série entière en utilisant les équations différentielles ?	199
9. Comment calculer la somme d'une série entière en utilisant les équations différentielles ?	200
10. Comment développer une fonction rationnelle en série entière?	201
17. Séries de Fourier	203
1. Comment déterminer les coefficients de Fourier d'une fonction périodique ?	204
2. Comment appliquer le théorème de Dirichlet ?	205
3. Comment développer une fonction périodique en série de Fourier ?	206
4. Comment utiliser le théorème de Parseval ?	207
18. Transformation de Laplace	209
1. Comment résoudre une équation différentielle en utilisant la transformation Laplace ?	210
2. Comment résoudre un système différentiel linéaire en utilisant la transformation de Laplace ?	211

PARTIE 3. EXERCICES CORRIGÉS

19. Exercices complémentaires	215
20. Corrigés des exercices	245
1. Structures algébriques (compléments)	245
2. Compléments sur les polynômes	255
3. Déterminants et systèmes linéaires	261
4. Dualité	279
5. Réduction des endomorphismes et des matrices	292
6. Espaces euclidiens	319
7. Formes bilinéaires et formes quadratiques	335
8. Algèbre sesquilinéaire	351
9. Coniques	361
10. Notions de topologie	377
11. Fonctions de plusieurs variables réelles	389
12. Intégrales généralisées	404
13. Séries numériques	417
14. Suites de fonctions	436
15. Séries de fonctions	445
16. Séries entières	453
17. Séries de Fourier	466
18. Transformation de Laplace	473
21. Formulaire.....	477