chapitre 1

Nombres complexes

1. Calcul du module et de l'argument d'une puissance d'un nombre complexe.
2. Simplification d'un rapport de nombres complexes.
3. Pour montrer qu'un nombre complexe est réel.
4. Pour montrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur.
5. Racines carrées d'un nombre complexe.
6. Racines n-ièmes d'un nombre complexe.
7. Factorisation d'un polynôme réel.
8. Linéarisation des expressions de la forme $\cos^m x \quad \sin^n x$ où $m,\ n \in \mathbf{N}$.
9. Calcul de $\cos(n\theta)$ et de $\sin(n\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.
10. Écriture de $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et de $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\theta \in \mathbf{R})$ sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $(r,\alpha) \in \mathbf{R}^2$.
11. Simplification de sommes de cosinus (resp. sinus).

méthode 1

Calcul du module et de l'argument d'une puissance d'un nombre complexe

Pour calculer le module et l'argument d'une puissance d'un nombre complexe, on calcule d'abord le module et l'argument de ce nombre, puis on l'élève à la puissance voulue.

Exemple

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z=(1+i\sqrt{3})^{20}$ *.*

Comme

$$(1+i\sqrt{3})=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

donc

$$\left|1+i\sqrt{3}\right|=2 \quad \text{et} \quad \arg(1+i\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

d'où

$$z=(1+i\sqrt{3})^{20}=\left(2\ e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{20}=(2)^{20}e^{i\frac{20\pi}{3}}$$

$$=2^{20}e^{i\frac{(18+2)}{3}\pi}=2^{20}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

et par suite

$$|z|=\left|(1+i\sqrt{3})^{20}\right|=2^{20} \quad \text{et} \quad \arg(z)=\frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

Exercice

• Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

a. $(-1+i)^4$;

b. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$;

c. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right)^5$;

d. $\left(\frac{4}{1+i\sqrt{3}}\right)^7$.

Simplification d'un rapport de nombres complexes

Pour simplifier un rapport de nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple

Simplifier le nombre complexe $z = \dfrac{2i}{(4-i)(1+3i)}$.

Comme l'expression conjuguée du dénominateur est $(4+i)(1-3i)$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{2i}{(4-i)(1+3i)} \\ &= \frac{2i(4+i)(1-3i)}{(4-i)(1+3i)(4+i)(1-3i)} \\ &= \frac{2i(4+i)(1-3i)}{(4^2+1^2)(1^2+3^2)} \\ &= \frac{2i(4+i-12i+3)}{17 \cdot 10} \\ &= \frac{22+14i}{170} \\ &= \frac{11}{85} + i\frac{7}{85}. \end{aligned}$$

Exercice

• Simplifier les nombres complexes suivants :

a. $\dfrac{3-i}{3+4i}$

b. $\dfrac{1-i}{i}$

c. $\dfrac{(2+i)(3-i)}{4i}$

d. $\dfrac{4-3i}{i-1}$

e. $\dfrac{5-3i}{(4-i)(1+3i)}$

f. $\dfrac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)}$

g. $\dfrac{7i}{2-i}$

h. $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

i. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

j. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$.

méthode 3

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel, on montre que :

- soit sa partie imaginaire est nulle,
- soit qu'il est égal à son conjugué,
- soit son argument est congru à 0 modulo π.

Exemple

Soit $z = \mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right)$ *avec* $\alpha \notin 2\pi\mathbf{Z}$.

Montrer que z *est un nombre réel.*

On a :

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= -\mathrm{i}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\right)\\
&= -\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\right)\\
&= -\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}\right)\\
&= \mathrm{i}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right)\\
&= z
\end{aligned}$$

Donc $\overline{z} = z$ et par suite z est un nombre réel.

Exercices

- **Ex. 1.** À tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$. Établir que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
- **Ex. 2.** Démontrer que, quels que soient les nombres complexes z, z' de module 1 et vérifiant $zz'+1 \neq 0$, le nombre $Z = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.
- **Ex. 3.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z+2}{z-2\mathrm{i}}$ soit un nombre réel.

Pour montrer qu'un nombre complexe non nul est imaginaire pur

Pour montrer qu'un nombre complexe non nul est imaginaire pur, on montre que :

- soit sa partie réelle est nulle,
- soit qu'il est égal à l'opposé de son conjugué,
- soit son argument est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Exemple

Soit $z = \mathrm{i} + \frac{1}{2\mathrm{i}}$. Montrer que z est un imaginaire pur.

On a :

$$\begin{aligned} \overline{z} &= -\mathrm{i} + \frac{1}{-2\mathrm{i}} \\ &= -z \end{aligned}$$

donc z est un imaginaire pur.

Exercices

- **Ex. 1.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z-1}{\overline{z}+1}$ soit imaginaire pur.
- **Ex. 2.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ soit imaginaire pur.
- **Ex. 3.** À tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\overline{z}}$. Le nombre complexe $\frac{z'-1}{z-1}$ est-il imaginaire pur ?
- **Ex. 4.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z+2+3\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$ soit imaginaire pur.

méthode 5

Racines carrées d'un nombre complexe

Pour déterminer les racines carrées de $z=a+\mathrm{i}b$, il est préférable de procéder par identification, c'est-à-dire chercher les nombres réels x,y tels que :

$$(x+\mathrm{i}y)^2=a+\mathrm{i}b.$$

L'égalité des parties réelles, des parties imaginaires et des modules permettent d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

d'où x^2 et y^2 puis x,y en utilisant le fait que xy est du signe de b.

Exemple

Calculer les racines carrées de $z=3-4\mathrm{i}$.

On résout le système suivant :

$$(S):\begin{cases} x^2-y^2 = 3 & (1) \\ 2xy = -4 & (2) \\ x^2+y^2 = \sqrt{3^2+(-4)^2}=5 & (3) \end{cases}$$

Or (S) est équivalent au système :

$$\begin{cases} 2x^2 = 8 & (1)+(3) \\ 2xy = -4 & (2) \\ 2y^2 = 2 & (3)-(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{cases}$$

ou encore $$(S)\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ et } y=-1 \\ \text{ou} \\ x=-2 \text{ et } y=1 \end{cases}$$

Les racines carrées de z sont donc : $z_1=2-\mathrm{i}$ et $z_2=-2+\mathrm{i}$.

Exercices

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- **Ex. 1.** $1+2\mathrm{i}$;
- **Ex. 2.** $4-\mathrm{i}$;
- **Ex. 3.** $1+\mathrm{i}$;
- **Ex. 4.** $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe non nul

Pour trouver l'ensemble des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul z, on commence d'abord par le mettre sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$, ensuite on cherche une racine n-ième de z, puis on multiplie par les racines n-ièmes de l'unité $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Exemple

Trouver les racines 5e de $z = (1+i)$.

Comme : $(1+i) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$,

donc une racine 5e de z est :

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{5}} e^{i\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt[10]{2}\, e^{i\frac{\pi}{20}} \end{aligned}$$

d'où les racines 5e de z sont :

$$\begin{aligned} z_k &= z_0 u_k \\ &= \sqrt[10]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)} \end{aligned}$$

avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

Exercices

- **Ex. 1.** Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1+i)$.
- **Ex. 2.** Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1-i)$.
- **Ex. 3.** Déterminer les racines cubiques de $\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ où $\theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
- **Ex. 4.** Calculer les racines 4e du nombre complexe $z = 8(-1+i\sqrt{3})$.
- **Ex. 5.** Calculer les racines 5e du nombre complexe $z = 32i$.
- **Ex. 6.** Déterminer les racines 4e du nombre complexe $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

méthode 7

Factorisation d'un polynôme réel

Quand on cherche à factoriser un polynôme *réel* P et qu'on a trouvé une racine *imaginaire* z, on sait que $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Exemples

1. Factoriser le polynôme : $P = z^3 + z^2 + z + 1$.

Comme $z_1 = \mathrm{i}$ est une racine de P,

donc $z_2 = -\mathrm{i}$ est aussi racine de P

et par suite $P = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(z + 1)$.

2. Factoriser le polynôme : $P = z^3 - z^2 + z - 1$.

Comme $z_1 = \mathrm{i}$ est une racine de P,

donc $z_2 = -\mathrm{i}$ est aussi racine de P

et par suite $P = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(z - 1)$.

Remarque

Toute fonction polynôme de degré n, à coefficients dans **C** *admet n racines distinctes ou non. En particulier, si on a trouvé par exemple n racines grâce à des relations sur les arguments, on obtiendra toutes les racines.*

Exercice

• Factoriser les polynômes suivants :

a. $P = z^3 - 1$;

b. $P = z^3 + 1$;

c. $P = z^6 - 1$;

d. $P = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$;

e. $P = z^6 + 1$;

f. $P = z^4 + z^2 + 1$;

g. $P = z^4 - z^2 + 1$;

h. $P = z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.