

Table des matières

Partie 1. Algèbre

1. Nombres complexes	13
1. Calcul du module et de l'argument d'une puissance d'un nombre complexe.....	14
2. Simplification d'un rapport de nombres complexes est réel.....	15
3. Pour montrer qu'un nombre complexe est réel	16
4. Pour montrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur.....	17
5. Racines carrées d'un nombre complexe.....	18
6. Racines n -ièmes d'un nombre complexe	19
7. Factorisation d'un polynôme réel.....	20
8. Linéarisation des expressions de la forme $\cos^m x \sin^n x$	21
9. Calcul de $\cos(n\theta)$ et de $\sin(n\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$	22
10. Écriture de $1+e^{i\theta}$ et de $1-e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbf{R}$) sous la forme $re^{i\alpha}$ avec $(r, \alpha) \in \mathbf{R}^2$	23
11. Simplification de sommes de cosinus (resp. sinus).....	24
2. Ensembles – Relations – Applications	25
1. Le raisonnement par récurrence.....	26
2. Le raisonnement par l'absurde.....	27
3. Le raisonnement par contraposée.....	28
4. L'inclusion	29
5. Égalité de deux ensembles.....	30
6. Égalité de deux applications.....	31
7. Composée de deux applications.....	32
8. Image d'une partie.....	33
9. Image réciproque d'une partie	34
10. Injectivité.....	35
11. Surjectivité.....	36
12. Bijectivité	37
13. Bijection réciproque.....	38
14. Réflexivité.....	39
15. Symétrie.....	40
16. Transitivité.....	41
17. Relation d'équivalence	42
18. Classes d'équivalence.....	43
19. Ensemble quotient.....	44
20. Antisymétrie	45
21. Relation d'ordre.....	46
22. Ordre total et ordre partiel	47

3. Entiers relatifs et arithmétique dans \mathbb{Z}	49
1. Divisibilité par un entier	50
2. Détermination du pgcd en utilisant la définition	51
3. Détermination du pgcd en utilisant l'algorithme d'Euclide	52
4. Nombres premiers entre eux	53
5. Solutions de l'équation $au + bv = c$	54
6. Nombres premiers	55
4. Polynômes et fractions rationnelles	57
1. Division euclidienne	58
2. Racines d'un polynôme	59
3. Divisibilité de deux polynômes en utilisant la division euclidienne	60
4. Divisibilité de deux polynômes en utilisant les racines	61
5. Égalité de deux polynômes	62
6. Factorisation d'un polynôme	63
7. Partie entière d'une fraction rationnelle	64
8. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle paire (resp. impaire)	65
9. Coefficient relatif à un pôle simple	66
10. Division suivant les puissances croissantes	67
11. Coefficients relatifs à un pôle multiple	68
12. Décomposition en éléments simples	69
5. Structures algébriques	71
1. Loi de composition interne	72
2. Commutativité	73
3. Associativité	74
4. Élément neutre	75
5. Élément symétrique	76
6. Élément régulier	77
7. Distributivité	78
8. Partie stable	79
9. Loi de composition externe	80
10. Groupe	81
11. Morphisme de groupe	82
12. Sous-groupe d'un groupe	83
13. Anneau	84
14. Morphisme d'anneau	85
15. Sous-anneau	86
16. Élément inversible	87
17. Structure de corps	88
18. Espace vectoriel	89
6. Espaces vectoriels	91
1. Partie stable par combinaison linéaire	92
2. Partie engendrée par une famille de vecteurs	93
3. Sous-espace vectoriel	94
4. Sous-espace vectoriel en utilisant l'intersection	95
5. Somme de deux sous-espaces vectoriels	96
6. Espace vectoriel	97
7. Sous-espaces vectoriels supplémentaires	98
8. Famille génératrice ou système générateur	99

9. Famille libre ou vecteurs linéairement indépendants.....	100
10. Famille liée ou vecteurs linéairement dépendants.....	101
11. Base	102
12. Dimension d'un espace vectoriel.....	103
13. Application linéaire.....	104
14. Noyau d'une application linéaire.....	105
15. Injectivité d'une application linéaire.....	106
16. Image d'une application linéaire	107
17. Rang d'une application linéaire	108
18. Endomorphisme, Isomorphisme, Automorphisme	109
19. Projecteur	110
20. Symétrie.....	111
7. Espace vectoriel de dimension finie	113
1. Pour montrer qu'une famille est une base	114
2. Pour construire une base	115
3. Détermination d'une base d'un sous-espace vectoriel.....	116
4. Rang d'une famille de vecteurs	117
5. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.....	118
6. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.....	119
7. Pour trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.....	120
8. Comment définir une application linéaire ?	121
9. Pour montrer qu'une application linéaire entre deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies est un isomorphisme.....	122
10. Comment définir un projecteur ?	123
11. Comment définir une symétrie ?	124
8. Matrices et Systèmes linéaires	125
1. Comment trouver la matrice d'une application linéaire ?	126
2. Comment montrer qu'une matrice carrée est inversible ?	127
3. Comment inverser une matrice inversible ?	128
4. Comment trouver la matrice de passage d'une base à une autre ?	129
5. Changement de base	130
6. Matrice d'une application linéaire dans un changement de base	131
7. Rang d'une matrice.....	132
8. Rang d'un système	133
9. Résolution d'un système linéaire	134
 Partie 2. Analyse	
9. Suites réelles.....	137
1. Comment montrer qu'une suite de nombres réels est croissante ?	138
2. Comment montrer qu'une suite de nombres réels est décroissante ?	139
3. Comment montrer qu'une suite est convergente en revenant à la définition ?	140
4. Comment montrer qu'une suite est convergente en utilisant la monotonie ?	141
5. Comment montrer qu'une suite est convergente en utilisant les suites extraites ?	142
6. Comment montrer qu'une suite est convergente en utilisant les encadrements ?	143
7. Comment calculer la limite d'une suite convergente en utilisant les opérations ?	144
8. Comment montrer que deux suites sont adjacentes ?	145
9. Comment étudier une suite récurrente de la forme $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$?	146

10. Continuité et limites	147
1. Comment montrer la continuité d'une fonction en revenant à la définition ?.....	148
2. Comment montrer la continuité d'une fonction en utilisant les opérations ?.....	149
3. Comment montrer la continuité d'une fonction en utilisant les limites ?.....	150
4. Comment montrer la discontinuité d'une fonction en utilisant la définition ?.....	151
5. Comment montrer la discontinuité d'une fonction en utilisant la bornitude ?.....	152
6. Comment montrer la discontinuité d'une fonction en utilisant les suites ?.....	153
7. Comment trouver la limite d'une fonction en un point en utilisant les opérations sur les limites ?.....	154
8. Comment trouver la limite d'une fonction en utilisant les équivalents ?.....	155
9. Comment montrer l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, où f est une fonction continue sur un intervalle I de \mathbf{R} ?.....	156
11. Dérivation	157
1. Comment montrer qu'une fonction est dérivable en revenant à la définition ?.....	158
2. Comment montrer qu'une fonction est dérivable en utilisant les opérations sur les dérivées ?.....	159
3. Comment montrer qu'une fonction est dérivable en utilisant la limite de la dérivée ?.....	160
4. Comment calculer la dérivée n -ième d'un produit de fonctions ?.....	161
5. Comment trouver un extremum d'une fonction dérivable sur un intervalle ?.....	162
6. Comment montrer la convexité d'une fonction deux fois dérivable ?.....	163
7. Comment utiliser le théorème des accroissements finis ?.....	164
8. Comment utiliser le théorème de Rolle ?.....	165
9. Comment utiliser la règle de l'Hôpital ?.....	166
12. Développements limités	167
1. Comment calculer un développement limité d'une fonction simple ?.....	168
2. Comment obtenir un développement limité d'une somme de deux fonctions ?.....	169
3. Comment obtenir un développement limité d'un produit de deux fonctions ?.....	170
4. Comment obtenir un développement limité d'un quotient de deux fonctions ?.....	171
5. Comment obtenir un développement limité d'une composée de fonctions ?.....	172
6. Comment obtenir un développement limité à l'ordre n d'une primitive ?.....	173
7. Comment calculer un développement limité d'une fonction quelconque ?.....	174
8. Comment calculer une limite en utilisant un développement limité ?.....	175
13. Fonctions usuelles	177
1. Comment étudier une fonction ?.....	178
2. Comment étudier les fonctions logarithmes et exponentielles ?.....	179
3. Comment étudier les fonctions circulaires ?.....	180
4. Comment étudier les fonctions hyperboliques ?.....	181
5. Comment étudier les fonctions circulaires réciproques ?.....	182
6. Comment étudier les fonctions hyperboliques réciproques ?.....	183
14. Primitives et intégrales	185
1. Comment calculer une primitive d'une fraction rationnelle ?.....	186
2. Comment calculer une primitive d'une fonction rationnelle en e^x ?.....	187
3. Comment calculer une primitive d'une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$?.....	188
4. Comment calculer une primitive d'une fonction rationnelle en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$?.....	189

5. Comment calculer une primitive d'une fonction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$?..... 190

6. Comment calculer une primitive d'une fonction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$?...191

15. Équations différentielles 193

- 1. Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre à variables séparées ?..... 194
- 2. Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre incomplète ?..... 195
- 3. Comment résoudre une équation différentielle homogène du premier ordre ?..... 196
- 4. Comment résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre ?.....197
- 5. Comment résoudre une équation différentielle de Bernoulli ? 198
- 6. Comment résoudre une équation différentielle de Ricatti ? 199
- 7. Comment résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre ? 200
- 8. Comment résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants ? 201
- 9. Comment résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ?..... 202
- 10. Comment résoudre une équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$ où $f(x) = R_n(x)\cos(mx)e^{kx}$ ou $f(x) = R_n(x)\sin(mx)e^{kx}$?..... 203

PARTIE 3. EXERCICES CORRIGÉS

16. Exercices complémentaires 207

17. Corrigés des exercices 221

- 1. Nombres complexes..... 221
- 2. Ensembles – Relations – Applications 231
- 3. Entiers relatifs et Arithmétique dans \mathbf{Z} 247
- 4. Polynômes et Fractions rationnelles 252
- 5. Structures algébriques..... 258
- 6. Espaces vectoriels..... 273
- 7. Espace vectoriel de dimension finie 296
- 8. Matrices et Systèmes linéaires..... 312
- 9. Suites réelles 329
- 10. Continuité et limites..... 340
- 11. Dérivation 349
- 12. Développements limités 361
- 13. Fonctions usuelles..... 371
- 14. Primitives et intégrales..... 390
- 15. Équations différentielles..... 400

18. Formulaire 413

- Formules de trigonométrie 415
- Formules de trigonométrie hyperbolique.....416
- Développements limités de référence 417
- Primitives de référence 418