

1. L'aspect algébrique

La hiérarchie numérique débute par les nombres entiers naturels qui comptent les éléments des ensembles finis. Leur ensemble, noté \mathbb{N} , est muni d'une addition $m + n$ et d'une multiplication mn . Le besoin de résoudre les équations du type $x + m = n$ et $mx = n$ a amené à l'élargir et à introduire l'anneau des entiers relatifs $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et le corps des nombres rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Les nombres réels sont arrivés pour des besoins géométriques ou autres (on pourrait à cet effet évoquer simplement le nombre $\sqrt{2}$ à partir du théorème de Pythagore). Ces derniers forment un corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ possédant beaucoup de propriétés intéressantes, entre autres la *complétude*, fondamentale en analyse : toute suite de Cauchy y converge.

Malgré toutes les belles propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$, un problème se pose : on ne peut pas y résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Il est donc nécessaire de l'agrandir en le plongeant dans un corps commutatif \mathcal{K} (le plus petit) dans lequel cela sera possible. C'est l'objet de cette section.

1.1. Construction de \mathcal{K}

• Supposons que \mathcal{K} est construit et qu'on y a trouvé un élément i (*imaginaire*, c'est pour cela qu'on le note ainsi) tel que $i^2 = -1$; \mathcal{K} devrait alors contenir tous les produits $iy = yi$ avec $y \in \mathbb{R}$ et par suite les éléments de la forme $x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. En plus, le produit $(x + iy)(x' + iy')$, calculé en utilisant les règles habituelles (commutativité, associativité, distributivité), doit aussi rester de cette forme ; et c'est le cas puisque :

$$\begin{aligned} (x + iy)(x' + iy') &= x(x' + iy') + (iy)(x' + iy') \\ &= xx' + xiy' + iyx' + iyy' \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y). \end{aligned}$$

Cela nous suggère \mathbb{R}^2 comme ensemble sous-jacent à \mathcal{K} ainsi que les opérations d'addition et de multiplication à mettre dessus :

$$(1) \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Il est bien connu que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif ; son élément neutre est $(0, 0)$ et le symétrique de (x, y) étant son opposé $(-x, -y)$. Des calculs faciles à mener montrent que la multiplication qu'on vient de définir est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et qu'elle a $(1, 0)$ comme élément neutre. Montrons que tout élément non nul (x, y) a un inverse (x', y') ; on doit avoir $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) = (1, 0)$, ce qui nous amène à la résolution du système linéaire (où les inconnues sont les nombres réels x' et y') :

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $(x', y') = (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$. Tout élément $(x, y) \neq (0, 0)$ est donc inversible. L'ensemble $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2$ muni des opérations d'addition et de multiplication définies en (0.1) est donc un corps commutatif.

• Nous allons plonger le corps des réels \mathbb{R} dans le corps \mathcal{K} qu'on vient de construire. À cet effet, on considère l'application $j : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{K}$ définie par $j(x) = (x, 0)$. Il est évident que j est injective et vérifie, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$:

$$j(x + x') = j(x) + j(x') \quad \text{et} \quad j(xx') = j(x)j(x')$$

autrement dit, j est un homomorphisme de corps, injectif ; on peut alors voir \mathbb{R} comme un *sous-corps* de \mathcal{K} . Le nombre réel x sera identifié à l'élément $(x, 0)$; on écrira donc $(x, 0) = x$ tout simplement. Il est aussi facile de voir que $(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$; l'élément $(0, 1)$, qui n'est pas réel mais dont le carré vaut le réel -1 sera noté i . Ainsi tout élément $z = (x, y)$ de \mathcal{K} s'écrira sous la forme :

$$(2) \quad z = x + iy \quad \text{avec} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Cette représentation est unique. En effet si $z = x + iy = x' + iy'$, on a $x - x' = i(y' - y)$; donc $(x - x')^2 = -(y' - y)^2$, ce qui n'est possible que si $x = x'$ et $y = y'$.

Le nombre réel x est appelé *partie réelle* de z qui est notée $\Re(z)$; y est sa *partie imaginaire* et est notée $\Im(z)$. Un nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ est dit *imaginaire pur*.

• \mathcal{K} est le plus petit corps contenant \mathbb{R} et dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet une solution. On le note \mathbb{C} et on l'appelle le corps des *nombres complexes*.

1.2. Quelques propriétés et définitions

• L'application de \mathbb{C} dans lui-même qui à tout $z = x + iy$ associe le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelée *conjugaison* ; on dira que \bar{z} est le *conjugué* de z . Cette application est une involution *i.e.* $\overline{\bar{z}} = z$; et c'est un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, c'est-à-dire qu'on a :

$$(3) \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \text{et} \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}.$$

On en déduit alors (pour $z' \neq 0$) $\bar{z} = \overline{z' \cdot \left(\frac{z}{z'}\right)} = \bar{z'} \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$ et donc $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; autrement dit, le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Alors $\bar{z} = z$ si, et seulement si, z est réduit à sa partie réelle x .

• Un nombre complexe z est connu dès qu'on a sa partie réelle x et sa partie imaginaire y . Inversement, on peut donner x et y en fonction de z et \bar{z} . En effet, on a le système :

$$\begin{cases} x + iy = z \\ x - iy = \bar{z}. \end{cases}$$

Sa résolution immédiate donne :

$$(4) \quad \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{cases}$$

• Tel qu'on a construit \mathbb{C} , c'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2 (par exemple $(1, i)$ en est une base ; c'est la plus utilisée). Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. On a :

$$z\bar{z}' = (xx' + yy') - i(xy' - yx').$$

La partie réelle de ce nombre définit une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$; comme $\langle z, z \rangle = z\bar{z} = x^2 + y^2 > 0$ pour tout z non nul, cette forme est définie positive, c'est donc un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Il donne alors lieu à une norme :

$$(5) \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le nombre réel positif ou nul $|z|$ est appelé *module* du nombre complexe $z = x + iy$. Les principales propriétés du module sont :

$$(6) \quad |zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Évidemment, lorsque z est réel, son module n'est rien d'autre que sa valeur absolue $|z|$ qu'on connaît habituellement. On a en particulier $|1| = 1$ et $|i| = 1$. Comme en plus $\langle 1, i \rangle = 0$, la base $\{1, i\}$ du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} est en fait orthonormée.

2. L'aspect géométrique

Nous avons vu la représentation algébrique des nombres complexes $z = x + iy$ qui fait de \mathbb{C} un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2. Il y a donc une identification canonique entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy = z \in \mathbb{C}$.

Deux groupes sont en jeu : le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ et le groupe multiplicatif (\mathbb{C}^*, \times) . Nous allons les interpréter géométriquement.

2.1. Le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. La transformation $\tau_z : u \in \mathbb{C} \mapsto u + z \in \mathbb{C}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $\tau_z(\alpha, \beta) = (\alpha + x, \beta + y)$; elle correspond à la translation par le vecteur $z = (x, y)$. Nous avons donc une application :

$$\tau : z \in \mathbb{C} \mapsto \tau_z \in \mathcal{T}$$

où \mathcal{T} est le groupe des translations du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Un calcul assez facile montre que τ est une bijection vérifiant $\tau_{z+z'} = \tau_{z'} \circ \tau_z$, autrement dit, τ est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe (\mathcal{T}, \circ) où \circ est la composition des applications.

2.2. Le groupe multiplicatif (\mathbb{C}, \times) ou (\mathbb{C}, \cdot)

• Nous avons vu que la partie réelle de l'application $(z, z') \mapsto z\bar{z}'$ définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$. On peut donc parler de *similitude linéaire directe* ("directe" signifie qu'elle préserve l'orientation donnée par exemple par la base $(1, i)$). La matrice Z d'une telle application par rapport à la base orthonormée $(1, i)$ a la forme :

$$(7) \quad Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

où x et y sont des nombres réels non simultanément nuls. Si :

$$Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z' = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$$

sont deux matrices de ce type, leur produit (calcul facile à mener) est encore de ce type :

$$(8) \quad Z \cdot Z' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + x'y) \\ xy' + x'y & xx' - yy' \end{pmatrix}.$$

Bien évidemment, la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en fait partie ainsi que l'inverse de $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ qui est $Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$. L'ensemble des matrices de la forme (0.7) avec $x^2 + y^2 \neq 0$ muni de la multiplication habituelle est un groupe commutatif (facile à voir sur le produit (8)). Il est isomorphe au groupe $(\text{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ)$ des similitudes linéaires directes de l'espace euclidien $(\mathbb{C}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Comme en plus l'ensemble \mathcal{H} de toutes les matrices de la forme (7) (sans imposer cette fois-ci la condition $x^2 + y^2 \neq 0$) est un groupe pour l'addition habituelle (des matrices), $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ est en fait un corps commutatif canoniquement isomorphe au corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ via l'application :

$$(9) \quad z = x + iy \in \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

En conclusion, le groupe $(\mathbb{C}, +)$ est isomorphe au groupe des translations (\mathcal{T}, \circ) : quand on rajoute un nombre complexe $z = x + iy$ à $u = \alpha + i\beta$, on translate le point (α, β) par (x, y) .

Le groupe multiplicatif (\mathbb{C}, \cdot) est isomorphe à (\mathcal{H}^*, \cdot) (où \mathcal{H}^* est l'ensemble des matrices non nulles de la forme (7)) : multiplier $w = a + ib$ par $z = x + iy$ revient à appliquer à (a, b) la matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

• Nous venons donc d'identifier un nombre complexe non nul $z = x + iy$ à la matrice $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Mais cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de la similitude centrée à l'origine de rapport $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et d'angle θ tel que $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On a donc :

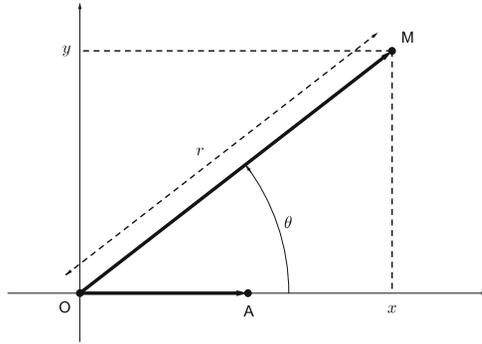
$$Z = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe correspondant s'écrit alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. L'angle θ (défini à un multiple entier de 2π près) est appelé *argument* de z et se note $\text{Arg}(z)$. Le nombre complexe non nul z est donc entièrement déterminé par son module r et son argument θ ;

on l'écrit $z = [r, \theta]$. Un calcul immédiat montre que $zz' = [r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$. L'application $\Phi : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto [r, \theta] = z \in \mathbb{C}^*$ est donc un homomorphisme de groupes ; il est surjectif mais pas injectif, son noyau est $\{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}$. Comme le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que le groupe $\text{SO}(2)$ des rotations de centre l'origine (c'est aussi le *groupe des angles* de sommet l'origine), Φ induit un isomorphisme de groupes :

$$(10) \quad \Phi : \mathbb{R}_+^* \times \text{SO}(2) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^*.$$

• La similitude Z appliquée au point $A = 1 = (1, 0)$ donne le point $M = x + iy$ tel que $OM = r$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ (modulo 2π) (voir le dessin ci-dessous).



3. Propriétés et calculs

On connaît très bien les règles de calcul sur les nombres réels. Elles sont un peu plus riches sur le corps des complexes car, en plus de leur aspect algébrique, elles y mêlent de la géométrie, principalement par l'usage qu'elles font des rotations.

3.1. Formule de Moivre

On vient de voir qu'un nombre complexe non nul $z = x + iy$ s'écrit aussi sous la forme trigonométrique :

$$(11) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est son module et θ son argument. On a aussi vu qu'on utilise l'écriture $z = [r, \theta]$ et que :

$$[r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

pour tout $z = x + iy$ et tout $z' = x' + iy'$ (tous deux non nuls). Comme $1 = [1, 0]$, cette formule implique :

$$\frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right].$$

On a donc, pour tout entier relatif n : $z^n = [r^n, n\theta]$. Mise sous forme trigonométrique, cette égalité s'écrit, pour $r = 1$:

$$(12) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

C'est la *formule de Moivre*.

On verra dans le chapitre sur les séries entières comment on définit l'exponentielle d'un nombre complexe qui permet d'écrire la formule de Moivre sous la forme :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{et donc} \quad e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Nous commencerons d'ores et déjà à l'utiliser car elle simplifie certains calculs et permet d'aller plus vite.

3.2. Racine d'un nombre complexe

• On sait que le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ a été fabriqué afin de répondre au besoin de la résolution de l'équation du second degré $z^2 + 1 = 0$; celle-ci a deux solutions $z_0 = i$ et $z_1 = -i$. *Qu'en est-il de l'équation $z^n = a$ où a est un nombre complexe non nul quelconque et n un entier tel que $n \geq 2$?* Posons $z = [r, \theta]$ et $a = [\rho, \alpha]$. L'équation devient alors $[r^n, n\theta] = [\rho, \alpha]$; ce qui est équivalent au système :

$$r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\theta = \alpha + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

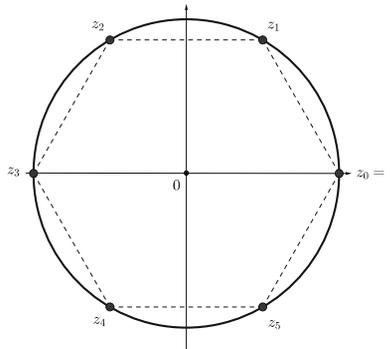
dont la résolution donne :

$$r = \rho^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'équation $z^n = a$ a donc les n solutions listées ci-dessous :

$$z_0 = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha}{n} \right], \quad z_1 = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha + 2\pi}{n} \right], \dots, \quad z_{n-1} = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha + (n-1)2\pi}{n} \right].$$

En particulier, si $a = 1$, on obtient les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité $z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n} \right]$ où k varie dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$. On peut les représenter géométriquement sur le cercle unité par les sommets d'un polygone régulier à n côtés dont l'un d'eux est $z_0 = 1$ (voir dessin ci-dessous pour $n = 6$).



• Dans $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, l'équation du second degré $x^2 + 1 = 0$ a deux solutions i et $-i$. Qu'en est-il pour $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c étant des complexes avec, bien sûr, $a \neq 0$) ? En la mettant sous la forme :

$$a \left\{ \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\} = 0$$

on voit tout de suite que le problème se ramène au calcul des racines carrées du nombre complexe $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$; et ça on sait le faire bien entendu (cf. Exercice 1).

Le cas le plus ardu est celui de l'équation $P(z) = 0$ où P est un polynôme de degré n à coefficients complexes. On sait montrer qu'elle admet une solution : c'est le *théorème fondamental de l'algèbre*. Mais on ne sait pas toujours trouver explicitement les solutions.

3.3. Quelques applications

- La formule de Moivre (0.12) est importante ; elle permet, entre pas mal d'autres choses, de simplifier certains calculs en trigonométrie. Voyons quelques exemples.

– Prenons $n = 2$. Alors $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$. En développant le terme de gauche et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules bien connues :

$$\cos(2\theta) = (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta.$$

– Prenons $n = 3$. Alors $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$. De même, en développant le terme de gauche et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules bien connues :

$$\cos(3\theta) = 4(\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4(\sin \theta)^3.$$

– En prenant $n = 4$, on obtient :

$$\cos(4\theta) = (\cos \theta)^4 - 6(\cos \theta)^2(\sin \theta)^2 + (\sin \theta)^4$$

et

$$\sin(4\theta) = 4((\cos \theta)^3 \sin \theta - \cos \theta (\sin \theta)^3).$$

Ces méthodes sont aussi efficaces pour “linéariser” certaines expressions sous forme de puissances de $\cos \theta$ et $\sin \theta$; cela permet de faciliter la recherche de primitives et par suite le calcul d'un certain type d'intégrales. Sans trop insister là-dessus, nous donnons juste le cas de :

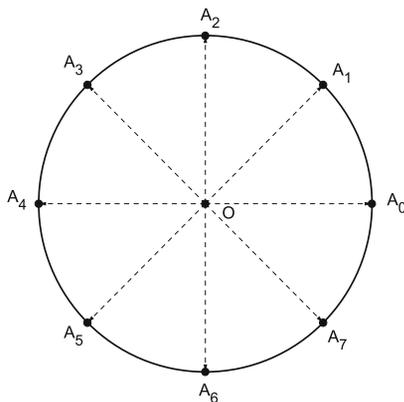
$$(\cos \theta)^2 = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \quad \text{et} \quad (\sin \theta)^3 = \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4}$$

dont les primitives respectives sont :

$$\frac{\sin(2\theta) + 2\theta}{4} + \text{constante} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(3\theta) - 9 \cos \theta}{12} + \text{constante}.$$

- Une application qui donne une remarque en géométrie. Soit $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la “première” racine $n^{\text{ème}}$ de 1. Comme $(1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1})(w - 1) = w^n - 1 = 0$ et que $w \neq 1$, on a $1 + w + \dots + w^{n-1} = 0$ qui se traduit géométriquement par (cf. dessin ci-dessous pour $n = 8$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}.$$



Cette relation en elle-même n'est pas étonnante : elle dit simplement que le point O est l'isobarycentre des sommets du polygone régulier $A_0A_1 \cdots A_{n-2}A_{n-1}$ comme on pouvait s'y attendre. Si on prend par exemple $w = j$ (racine cubique de l'unité), la relation $1 + j + j^2 = 0$ est d'une grande utilité (voir exercice 5).