Chapitre 1

Dérivée au sens de Gâteaux

Dans ce chapitre, E, F sont des espaces vectoriels normés réels de normes respectives $\|.\|_E$, $\|.\|_F$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on les note simplement $\|.\|$. On désigne par $\Omega \subset E$ un ouvert et $f : \Omega \subset E \to F$ une application de Ω dans F. On rappelle que $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ de la norme :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F.$$

Rappelons que lorsque $E = F = \mathbb{R}$; la dérivée de f en $a \in \Omega$, lorsqu'elle existe, est donnée par :

$$\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition 1.1.

Soient $f : \Omega \subset E \to F$ une fonction, $x, h \in E$. On dit que f admet une dérivée en x dans la direction h, si la limite

$$\lim_{\lambda \to 0,\, \lambda > 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$$

existe, qu'on notera par la suite $f'_h(x)$ ou $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$.

Remarque 1.2.

1. Ω étant un ouvert et $x \in \Omega$, il existe $\rho > 0$ tel que la boule de centre x et de rayon ρ, $B(x, \rho)$, soit contenue dans l'ouvert Ω et donc $x + \lambda h \in \Omega$ si $0 \leq \lambda \leq \frac{\rho}{\|h\|}$, avec $h \neq 0$; ainsi $f(x + \lambda h)$ est bien définie.
2. Si $\|.\|$ désigne la norme de l'espace vectoriel E, la définition nous dit que :

$$\lim_{\lambda \to 0,\, \lambda > 0} \frac{\|f(x + \lambda h) - f(x) - \lambda \frac{\partial f}{\partial h}(x)\|}{\lambda} = 0.$$

3. Remarquons aussi que la notion de dérivabilité d'une fonction dépend de la norme choisie, mais comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, si une fonction est dérivable pour une norme elle l'est pour toutes les autres normes.
4. $f'_0(x) = 0$, pour tout $x \in \Omega$.
5. Si $\mu > 0$, $f'_{\mu h}(x) = \mu f'_h(x)$.

Soient $f : \Omega \subset E \to F$ une fonction, $x \in \Omega$. On suppose que pour tout $h \in E$, f admet en x une dérivée dans la direction h. On obtient alors une fonction, qu'on note $f'(x)$, définie par :

$$f'(x) : E \to F, \quad f'(x)(h) = f'_h(x).$$

D'après 5 de la remarque 1.2, la fonction $f'(x)$ *est positivement homogène*, c'est-à-dire, qu'elle vérifie

$$f'(x)(th) = tf'(x)(h), \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 1.3.

Soient $f : \Omega \subset E \to F$ et $x \in \Omega$. On dit que la fonction f admet une dérivée directionnelle, ou est directionnellement dérivable en x, si pour tout $h \in E$, $f'_h(x)$ existe. Si f admet une dérivée directionnelle en x, alors on appelle la fonction, positivement homogène, $f'(x) : E \to F$ la dérivée directionnelle de f en x.

Il est clair que la dérivée directionnelle est unique.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x|$. Visiblement f admet une dérivée directionnelle en tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x)(h) = \begin{cases} h & \text{si } x > 0 \\ -h & \text{si } x < 0 \\ |h| & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y) = \min\{x, y\}.$$

La fonction g admet une dérivée directionnelle en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on a :

$$g'(x, y)(h, k) = \begin{cases} h & \text{si } x < y \\ k & \text{si } x > y \\ \min\{h, k\} & \text{si } x = y \end{cases}$$

3. Si $f : E \to F$ est une fonction positivement homogène, alors f admet une dérivée directionnelle en $0 \in E$ et $f'(0)(h) = f(h)$. Notons que la fonction de l'exemple ci-dessus,

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = \min\{x, y\}$$

est une fonction positivement homogène.

Définition 1.4.

Soient $f : \Omega \subset E \to F$ et $x \in \Omega$. On dit que f est dérivable en x au sens de Gâteaux, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $f'_h(x)$ existe pour tout $h \in E$, c'est-à-dire que la fonction f admet une dérivée directionnelle en x.
2. La dérivée directionnelle de f en x, $f'(x)$, est une application linéaire continue i.e. $f'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Convention 1.5.

Dans toute la suite, nous dirons qu'une fonction est dérivable en un point, si elle est dérivable au sens de Gâteaux en ce point.

Proposition 1.6.

Si f est dérivable en x, on a, pour tout $h \in E$,

$$f'_h(x) = -f'_{-h}(x) = \lim_{\lambda \to 0,\, \lambda \neq 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Preuve 1. *Puisque l'application $h \mapsto f'_h(x)$ est linéaire, alors on a :*

$$f'_h(x) = -f'_{-h}(x).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, on pose :

$$\varphi(\lambda) = \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}.$$

Par définition de la dérivée de f en x dans la direction h, on a :

$$f'_h(x) = \lim_{\lambda \to 0,\, \lambda > 0} \varphi(\lambda)$$

et

$$-f'_{-h}(x) = \lim_{\lambda \to 0,\, \lambda < 0} \varphi(\lambda)$$

et par conséquent on a :

$$\lim_{\lambda \to 0,\, \lambda > 0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0,\, \lambda < 0} \varphi(\lambda),$$

d'où la proposition.

1.1 Propriétés

Proposition 1.7.

Soient $f,\ g : \Omega \subset E \to F$, $x \in \Omega$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables en x, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable en x et $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.

Preuve 2. *La vérification est laissée au lecteur.*

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de 0 et on note $f = \circ(g)$, s'il existe une fonction $t \mapsto \varepsilon(t)$ définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0, telle que

$$f(t) = g(t)\varepsilon(t) \ \text{ et } \ \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

Avec cette notation, si $f : \Omega \subset E \to F$ est dérivable en $x \in \Omega$, alors on a

$$f(x + th) - f(x) - tf'(x)(h) = \eta(t),$$

où η est une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0, telle que $\eta(t) = \circ(t)$. On écrira par la suite,

$$f(x + th) = f(x) + tf'(x)(h) + \circ(t).$$

Proposition 1.8.

Soient $f,\ g : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ et $x \in \Omega$. Si f et g sont dérivables en x, alors la fonction fg est dérivable en x et
$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$.

Preuve 3. *On a*

$$f(x+th) = f(x) + tf'(x)(h) + \circ(t),$$

$$g(x+th) = g(x) + tg'(x)(h) + \circ(t),$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x+th)g(x+th) = f(x)g(x) &+ t(f(x)g'(x)(h) \\ &+ g(x)f'(x)(h)) + t^2 f'(x)(h)g'(x)(h) \\ &+ \circ(t)(f(x) + tf'(x)(h) + g(x) + tg'(x)(h) + \circ(t)), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat, car

$$t^2 f'(x)(h)g'(x)(h) + \circ(t)(f(x) + tf'(x)(h) + g(x) + tg'(x)(h) + \circ(t)) = \circ(t),$$

et la fonction $g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \in \mathcal{L}(E,F)$, comme combinaison linéaire de $f'(x)$ et $g'(x)$.

Maintenant, on va examiner la dérivabilité au sens de Gâteaux pour les fonctions composées (dérivabilité en chaîne).
Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \subset E \to F$, $g : W \subset F \to G$ deux fonctions, où Ω est un ouvert de E et W est un ouvert de F. On suppose que $f(\Omega) \subset W$.

Proposition 1.9.

Avec les notations ci-dessus, on suppose que f est dérivable en $x \in \Omega$ et g est dérivable en $f(x)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x et

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Preuve 4. *On traduit d'abord le fait que les fonctions f et g sont dérivables, respectivement, en x et $f(x)$.*

$$f(x+th) = f(x) + tf'(x)(h) + t\varepsilon_f(t),$$

$$g(f(x)+tk) = g(f(x)) + tg'(f(x))(k) + t\varepsilon_g(t),$$

avec

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon_f(t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon_g(t) = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} g\circ f(x+th) &= g(f(x) + t(f'(x)(h) + \varepsilon_f(t))) \\ &= g(f(x)) + tg'(f(x))(f'(x)(h) + \varepsilon_f(t)) + t\varepsilon_g(t). \end{aligned}$$

On pose

$$\varepsilon_{f\circ g}(t) = \varepsilon_g(t) + g'(f(x))(\varepsilon_f(t)),$$

utilisant la linéarité de la fonction $g'(f(x))$, on a

$$g\circ f(x+th) = g(f(x)) + t(g'(f(x))\circ f'(x))(h) + t\varepsilon_{f\circ g}(t).$$

Comme la dérivée directionnelle $g'(f(x))$ est continue, alors on a

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon_{f\circ g}(t) = 0,$$

ce qui prouve que $g\circ f$ admet une dérivée directionnelle en x et

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\circ f'(x).$$

Il en résulte que $g\circ f$ est dérivable en x, car $(g\circ f)'(x)$ est linéaire et continue (composée de fonctions linéaires et continues).

Remarque 1.10.

Dans la preuve de la proposition 1.9, le fait que l'application $g'(x)$ est linéaire et continue est déterminant. La version de la proposition 1.9 pour les fonctions qui admettent juste des dérivées directionnelles est fausse, comme le montre l'exemple suivant.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par

$$f(t) = \begin{cases} (t, t^2 \sin(\frac{1}{t})) & \text{si } t \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y \neq 0. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable au sens de Gâteaux en $0 \in \mathbb{R}$ et $f'(0)(h) = (h,0)$, donc a fortiori elle est directionnellement dérivable en $0 \in \mathbb{R}$ et sa dérivée directionnelle en 0 est donnée par $f'(0)(h) = (h,0)$.
Puisque la fonction g est positivement homogène, alors elle est directionnellement dérivable en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ et $g'(0,0)(h,k) = g(h,k)$. Remarquons que la fonction g n'est pas dérivable au sens de Gâteaux en $(0,0)$, car $g'(0,0)$ n'est pas linéaire.
On pose $h(t) = g \circ f(t)$, la fonction h est définie comme suit :

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in \{0, \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}^*\} \\ 0 & \text{si } t \notin \{0, \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}^*\} \end{cases}$$

Il est clair que la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(t)}{t},$$

n'existe pas. Cela se vérifie facilement en calculant cette limite suivant les deux suites convergentes vers 0 : $t_k = \frac{1}{k\pi}$ et $\tau_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$.

En s'inspirant de la preuve de la proposition 1.9, le lecteur est vivement invité à prouver la variante suivante de la proposition 1.9.

Proposition 1.11.

Avec les notations de la proposition 1.9, on suppose que f est directionnellement dérivable en $x \in \Omega$ et g est dérivable en $f(x)$, alors la fonction $g \circ f$ est directionnellement dérivable en x et sa dérivée directionnelle est donnée par :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$