Chapitre 1

Suites de nombres réels

1.1 Définitions

Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est une application $u : n \longmapsto u_n$ de $\mathbb{N}$, ou d'une partie de $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

1. On dit que la suite $(u_n)_n$ est *croissante* (respectivement *strictement croissante*) si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$).
2. On dit que la suite $(u_n)_n$ est *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) si pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
3. On dit que la suite $(u_n)_n$ est *stationnaire* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait
$$n \geq n_0 \implies u_n = u_{n_0}.$$
4. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré.
5. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré.
6. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Exemples 1.1 1. La suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = \cos\left(\frac{2n!\pi}{p}\right)$, où p est un entier naturel fixé, est stationnaire.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{n}{2^n}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$
Puisque les termes u_n sont positifs, on en déduit $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 1$. La suite (u_n) est donc décroissante. Elle est aussi bornée, car on a $0 < u_n \leq u_1$.

Définition 1.1 *Une suite $(v_n)_n$ est dite extraite de $(u_n)_n$ s'il existe une application strictement croissante $\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que pour tout n, on ait $v_n = u_{\gamma(n)}$.*

Exemple 1.1 Soit la suite $u_n = \cos(n\pi/4)$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; en effet pour $\gamma(n) = 4n$, on a : $v_n = u_{\gamma(n)} = cos(n\pi) = (-1)^n$.

1.2 Limite d'une suite

Définition 1.2 *Soient $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et l un nombre réel. On dit que $(u_n)_n$ tend (ou converge) vers l, et on écrit*
$$u_n \to l \text{ quand } n \to \infty \text{ ou } \lim u_n = l \text{ ou } \lim_{n\to\infty} u_n = l$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n on ait

$$n \geq n_0 \implies |u_n - l| < \varepsilon.$$

On dit que l est la limite de la suite $(u_n)_n$. Une suite, qui admet une limite, est dite convergente.

Exemple 1.2 On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0.$

Définition 1.3 *Une suite, qui n'est pas convergente, est dite divergente.*

Exemple 1.3 Les suites définies par

$$u_n = (-1)^n \,,\, v_n = \cos n \text{ et } w_n = \sin n$$

sont divergentes.

Proposition 1.1 *On a les résultats suivants :*

1. *La limite d'une suite convergente est unique.*
2. *Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.*
3. *Toute suite convergente est bornée.*
4. *Toute suite croissante majorée est convergente.*
5. *Toute suite décroissante minorée est convergente.*
6. *Toute suite infinie, extraite d'une suite convergente, converge et a même limite.*

Exemple 1.4 Considérons les suites réelles définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. La suite (u_n) est croissante majorée, donc elle est convergente.
2. La suite (v_n) est décroissante minorée, donc elle est convergente.

Proposition 1.2 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels l et l', et soit α un nombre réel, alors*

1. $\lim |u_n| = |l|$, $\lim(u_n + v_n) = l + l'$, $\lim(u_n v_n) = ll'$ *et* $\lim(\alpha u_n) = \alpha l$.
2. *si de plus* $l' \neq 0$, *alors* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l}{l'}$.
3. *si* $u_n \geq v_n$ *pour tout* n, *alors* $l \geq l'$.

Théorème des deux gendarmes
Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(u_n)_n$ trois suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Si les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers la même limite l, la suite $(u_n)_n$ converge aussi vers l.

Théorème de Bolzano-Weierstrass
De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exemple 1.5 Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = (-1)^n$, alors la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 et la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.

Remarque 1.1 Si une suite n'est pas bornée, il existe une sous-suite extraite qui tend vers ∞.

1.3 Suites adjacentes

Définition 1.4 *Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $(u_n)_n$ *est croissante et* $(v_n)_n$ *est décroissante.*
2. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Exemple 1.6 Les suites réelles définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}$$

sont adjacentes. La différence $u_{n+1} - u_n \frac{1}{(n+1)!}$, donc la suite $(u_n)_n$ est croissante. Et $v_{n+1} - v_n = -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0$, donc $(v_n)_n$ est une suite décroissante, $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc ces deux suites sont adjacentes et ont même limite $l \in]2{,}3[$, car $u_2 = \dfrac{5}{2}$ et $v_3 = \dfrac{17}{6}$

Proposition 1.3 *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes et ont une limite commune :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

1.4 Limites infinies

Définition 1.5 *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.*

1. *On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, et on écrit* $\lim u_n = +\infty$, *si pour tout $a > 0$ il existe un entier naturel n_0 tel que $u_n > a$ dès que $n > n_0$.*
2. *On dit que $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$, et on écrit* $\lim(u_n) = -\infty$, *si pour tout $a > 0$ il existe un entier naturel n_0 tel que $u_n < -a$ dès que $n > n_0$.*

Exemple 1.7 Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par : $u_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $a \in \mathbb{R}$. On a :

1. Si $a > 1$ alors $\lim a^n = +\infty$.
2. Si $|a| < 1$ alors $\lim a^n = 0$.
3. Si $a \leq -1$ alors $(u_n)_n$ est une suite divergente.
4. Si $a = 1$ alors $(u_n)_n$ est la suite constante avec $u_n = 1$.

La suite $(u_n)_n$ est dite géométrique de raison a.

Proposition 1.4 *On a :*

1. *Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*
2. *Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

Exemple 1.8 On considère la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

La suite $(u_n)_n$ est croissante et non majorée, sinon, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $u_p \leq M$, $\forall p$, or pour $p = 2^n$, on a :

$$\begin{aligned}
M \geq u_p &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\
&\geq 1 + \frac{n}{2},
\end{aligned}$$

ceci est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, ceci contredit le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien. Donc, la suite $(u_n)_n$ est non majorée, comme elle est croissante, on déduit qu'elle tend vers $+\infty$.

1.5 Formes indéterminées

Par formes indéterminées, on entend les différents cas suivants :

1. $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$ alors la suite $(u_n + v_n)_n$ prend la forme indéterminée $+\infty - \infty$,
2. $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = 0$ alors la suite $(u_n v_n)_n$ prend la forme indéterminée $+\infty \times 0$,
3. $\lim u_n = \pm\infty$ et $\lim v_n = \pm\infty$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$,
4. $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

1.6 Suites particulières

a) Suites de Cauchy

Définition 1.6 *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_n$ est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on ait*

$$n\,,\, m \;\geq\; n_0 \Longrightarrow |u_n \;-\; u_m| \;<\; \varepsilon.$$

Proposition 1.5 (Critère de Cauchy) *On a les résultats suivants :*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.*

Exemple 1.9 La suite définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Cette suite converge vers un nombre réel n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ (voir la section Exercices).

b) Suites récurrentes

Définition 1.7 *On appelle suite récurrente, toute suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

où f est une fonction réelle définie et continue sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subseteq I$ et a un nombre réel appartenant à I.

Proposition 1.6 *Si la suite récurrente $(u_n)_n$ est convergente, alors sa limite l vérifie la relation*
$l = f(l)$.

Exemple d'application 1.1 Considérons la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 1}. \end{cases}$$

Cette suite est strictement croissante, majorée par 2, donc elle est convergente. Sa limite vérifie $l = \sqrt{l+1}$, donc

$$l^2 - l - 1 = 0,$$

par suite,

$$l = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

comme $l \geq 0$, on déduit que l'on a

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Théorème 1.1 *1. Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_n$ est monotone et on a :*

(a) $(u_n)_n$ est croissante si et seulement si $f(u_0) - u_0 \geq 0$.

(b) $(u_n)_n$ est décroissante si et seulement si $f(u_0) - u_0 \leq 0$.

2. Si f est décroissante sur I, alors les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et varient en sens inverse.

Théorème 1.2 (Condition suffisante de convergence) *Si f est dérivable sur $]a,b[$ et s'il existe $k \in]0,1[$ tel que :*

$$\forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leq k,$$

si l'équation $l = f(l)$ admet une seule solution $l_0 \in]a,b[$, alors pour tout u_0 tel que $|u_0 - l_0| < \min\{b - l_0, l_0 - a\}$, la suite $(u_n)_n$ définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(n_n)$ converge vers l_0.

1.7 Exercices résolus

Exercice 1.1 *Étudier suivant les valeurs de a, l'existence des limites des suites suivantes :*

$$u_n = (\sin a)^n \quad et \quad v_n = (\cos a)^n.$$

Solution. On sait que si $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$.

- Pour $u_n = (\sin a)^n$, on a :
  - a) si $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors $u_n = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ est une suite stationnaire et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
  - b) si $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc (u_n) est divergente.

c) dans les autres cas différents des cas a) et b), on aura $|\sin a| < 1$ est donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Pour $v_n = (\cos a)^n$, on a $\cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$, si on prend $b = \frac{\pi}{2} - a$, on obtient $v_n = (\sin b)^n$ et on se ramène au cas précédent.

Exercice 1.2 *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Montrer que si cette suite converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(|u_n|)_n$ convergeant vers $|l|$.*
Que peut-on dire de la réciproque ?

Solution. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$n \geq N_\varepsilon \;\Rightarrow\; |u_n - l| < \varepsilon.$$

Or $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$, donc

$$n \geq N_\varepsilon \;\Rightarrow\; ||u_n| - |l|| < \varepsilon.$$

Ceci montre que $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$. La réciproque n'est pas vraie par exemple pour la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente mais $(|u_n|)_n$ est convergente.

Exercice 1.3 *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergente de limite non nulle. Montrer qu'il existe au moins un nombre réel r strictement positif et un entier naturel n_0 tels que*

$$|u_n| \;\geq\; r \;\; \textit{et} \;\; u_n u_m \;>\; 0$$

dès que $n, m \;\geq n_0$.

Solution. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}^*$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l| > 0$. La définition de la limite pour $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ donne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad \left(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}\right)$$

d'où

$$n,m \geq n_0 \Rightarrow l - \frac{|l|}{2} \leq u_n,\, u_m \leq l + \frac{|l|}{2}.$$

- Si $l > 0$, alors $\forall n, m \geq n_0$, on a $0 < \frac{l}{2} \leq u_n, u_m$, il suffit de poser $r = \frac{l}{2}$ on aura le résultat.
- Si $l < 0$, alors $\forall n, m \geq n_0$, on a $u_n, u_m \leq \frac{l}{2} < 0$, il suffit de poser $r = \frac{|l|}{2}$ on aura le résultat.

Donc, dans tous les cas ($r = \frac{|l|}{2}$), on a

$$|u_n| \;\geq\; r \;\; \text{et} \;\; u_n u_m \;>\; 0$$

dès que $n, m \;\geq n_0$.

Exercice 1.4 *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Solution. On a

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times \cdots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n},$$

or, pour $k = 2, \cdots, n-1$, on a : $0 \leq \dfrac{k}{n} \leq 1$, donc

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Exercice 1.5 *Soit $(u_n)_n$ la suite géométrique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n$ où $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que si $a > 1$ alors $\lim u_n = +\infty$.*

2. *Montrer que si $0 < a \leq 1$ alors la suite $(u_n)_n$ est convergente.*
3. *Montrer que si $a \leq -1$ alors $(u_n)_n$ est une suite divergente.*

Solution.

1. Si $a > 1$, on a bien $a = 1 + b$, avec $b > 0$. Puisque
$$a^n = (1+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p b^{n-p} = 1 + nb + \cdots + b^n,$$
alors $a^n \geq nb$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et comme $\lim nb = +\infty$, on a donc
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty.$$
2. Si $0 < a \leq 1$, pour $a \neq 1$, posons $C = \dfrac{1}{a}$, comme $C > 1$, on a $\lim C^n = +\infty$. Donc
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{C^n} = 0.$$
Dans le cas où $a = 1$, la suite est stationnaire et a pour limite 1.
3. Si $a \leq -1$ alors $u_n = (-1)^n |a|^n$, en utilisant ce qui précéde, on voit que la suite $(u_n)_n$ diverge.

Exercice 1.6 *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^p a^n$ où $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$.*

1. *Montrer que si $a > 1$ alors quelque soit l'entier $p \in \mathbb{Z}$, on a $\lim(n^p a^n) = +\infty$.*
2. *Montrer que si $|a| < 1$ alors quelque soit l'entier $p \in \mathbb{Z}$, on a $\lim(n^p a^n) = 0$.*

Solution.

1. On remarque d'abord que si $p \geq 0$, alors on $n^p \geq 1$ pour tout $n > 0$ donc aussi $u_n = n^p a^n \geq a^n$. Si $a > 1$, on sait que a^n tend vers $+\infty$, donc u_n tend aussi vers $+\infty$.
On suppose maintenant que $p = -1$, de sorte que l'on a $u_n = n^{-1}a^n = \dfrac{a^n}{n}$. On pose $h = a - 1$. Par hypothèse, le nombre h est strictement positif. Dans la formule du binôme
$$(1+h)^n = 1 + nh + C_n^2 h^2 + \ldots + C_n^k h^k + \ldots + h^n,$$
tous les termes de la somme sont positifs. Pour tout entier $n \geq 2$, on a donc l'inégalite
$$(1+h)^n > C_n^2 h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2.$$
Il vient alors $u_n = \dfrac{(1+h)^n}{n} > \dfrac{n-1}{2} h^2$ et par suite $\lim u_n = +\infty$.
On suppose enfin $p \leq -2$ et on pose $q = -p$, de sorte que l'on a $q \geq 2$. On pose $b = \sqrt[q]{a}$ et puisqu'on a $b^q = a$, il vient
$$u_n = n^{-q} a^n = \frac{a^n}{n^q} = \frac{(b^q)^n}{n^q} = \frac{b^{nq}}{n^q} = \frac{(b^n)^q}{n^q} = \left(\frac{b^n}{n}\right)^q.$$
Puisque $a > 1$, on a $b > 1$ donc b^n/n tend vers $+\infty$ d'après ce qui précédent. Les résultats sur la limite d'un produit de deux suites s'étendent à un produit de q suites. On en déduit que $\lim u_n = +\infty$.
2. Si $a = 0$, alors $u_n = n^p a^n = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est nulle.
On suppose $a \neq 0$ et $|a| < 1$, on pose $b = 1/|a|$. Il vient
$$|u_n| = |n^p a^n| = n^p |a|^n = \frac{n^p}{|b|^n}$$
et
$$\frac{1}{|u_n|} = \frac{|b|^n}{n^p} = n^{-p}|b|^n.$$
Puisqu'on a $b > 1$ par hypothèse, on en déduit que $n^{-p}|b|^n$ tend vers $+\infty$ d'après le cas précédent. Ainsi $\dfrac{1}{|u_n|}$ tend vers $+\infty$ et par suite $|u_n|$ tend vers 0. On a donc $\lim u_n = 0$.

Exercice 1.7 *Soit L un nombre réel tel que $0 < L < 1$ et soit (u_n) une suite. On suppose que pour tout n, on a $u_n \neq 0$ et $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L$.*

1. *Montrer que* $\lim u_n = 0$.
2. *Montrer que* $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$ *pour tout nombre réel a.*

Solution.

1. On a
$$\frac{u_n}{u_0} = \frac{u_1}{u_0}\frac{u_2}{u_1}\frac{u_3}{u_2}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}.$$
Puisque chacun des n facteurs du produit a un module strictement plus petit que L, il vient
$$\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{u_1}{u_0}\right|\left|\frac{u_2}{u_1}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < L^n,$$
c'est-à-dire $|u_n| < L^n|u_0|$ pour tout n.
Puisqu'on a $0 < L < 1$, la suite géométrique (L^n) a pour limite 0, donc aussi la suite $(|u_n|)$. cela montre que $\lim u_n = 0$.
2. Si $a = 0$, le résultat est évident. On suppose $a \neq 0$ et on pose $u_n = a^n/n!$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}.$$
On choisit un entier N tel que $N > 2|a|$. Quel que soit l'entier $n \geq N$, il vient
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} < \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}.$$
On raisonne comme précédemment. Si $n > N$, alors
$$\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^N$$
et donc
$$|u_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^N.$$
Puisque $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0, on en déduit $\lim u_n = 0$.

Exercice 1.8 *Montrer que, pour tout réel a strictement positif, on a* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Solution. Si $a = 1$, la suite $(\sqrt[n]{a})$ est constante de valeur 1.

On suppose $a > 1$ et on pose $h = a - 1$. Dans l'inégalité $(1+h)^n \geq 1 + nh$, on remplace h par h/n. Il vient
$$(1 +_f rachn)^n \geq 1 + h = a.$$
On prend les racines n-ièmes, ce qui conserve le sens de l'inégalité. On obtient l'encadrement
$$1 +_f rachn \geq \sqrt[n]{a} \geq 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$
La suite (h/n) a pour limite 0, donc $\lim(1 + (h/n)) = 1$. D'après l'encadrement précédent, on en déduit $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

On suppose $0 < a < 1$ et on pose $b = 1/a$. On a $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$. D'après le cas précédent, on a $\lim \sqrt[n]{b} = 1$ car le nombre b est strictement plus grand que 1. Il vient donc $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Exercice 1.9 *Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par*
$$u_n = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{(n^3+2)^{\frac{1}{3}}} + \ldots + \frac{1}{(n^3+n)^{\frac{1}{3}}}.$$
Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.