1. Classification des signaux

Pré-requis : aucun

Il existe de très nombreux types de signaux et il est commode de mettre en avant certaines propriétés pour en déduire une classification donnée, c'est-à-dire regrouper les signaux appartenant à une même famille selon des caractéristiques données.

Tout d'abord, il est possible de considérer le(s) paramètre(s) dont dépend le signal. Le plus habituel est le temps $\{t\}$ mais les signaux peuvent dépendre par exemple de l'espace et du temps (comme les ondes électromagnétiques) ou que de l'espace (comme les images fixes). Dans la suite, les signaux seront supposés monodimensionnels et dépendants du temps.

1.1. Classification déterministe – aléatoire (ou phénoménologique)

Un signal déterministe (ou signal certain) est un signal dont les états futurs peuvent être connus, c'est-à-dire dont l'évolution peut parfaitement être décrite par un modèle mathématique approprié : signal généralement rencontré en laboratoire, par exemple la sortie d'un générateur de fonctions sinusoïdales.

Un signal aléatoire a une forme imprévisible à l'avance, et est donc susceptible d'être porteur d'informations.

Exemples

Signal sinusoïdal : $x(t) = sin(\omega_0 t)$

Signal aléatoire : $x(t) = \cdots$
(sans représentation analytique)

A ces deux familles de signaux, il est possible d'associer également un certain nombre de caractéristiques de façon à préciser la classification comme indiqué par la Figure I.1. En particulier, les notions de stationnarité et d'ergodisme seront définies ultérieurement.

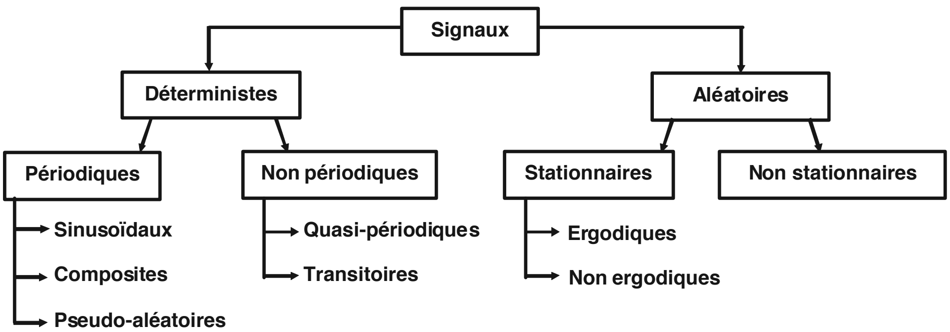

Figure I.1. *Classification des signaux déterministes - aléatoires.*

1.2. Classification continu – discret (ou morphologique)

La Figure I.2 illustre les quatre cas possibles selon que l'axe des abscisses (le temps) ou l'axe des ordonnées (l'amplitude) est discrétisé. L'échantillonnage est l'opération qui consiste à discrétiser le temps, et la quantification l'amplitude. Quatre types de signaux sont alors obtenus : signal analogique, signal échantillonné, signal quantifié, et signal numérique.

Les systèmes de traitement de signaux sont également classés selon la nature des signaux sur lesquels ils opèrent : systèmes analogiques de technologie électronique ou optique (amplificateurs, filtres analogiques, etc.), de systèmes échantillonnés (filtres à capacités commutées, filtres à transfert de charges, etc.) et systèmes numériques ou digitaux (filtres numériques, processeurs de signaux, etc.). Il existe également des systèmes hybrides (convertisseurs analogique-numérique et analogique-numérique, modems, etc.).

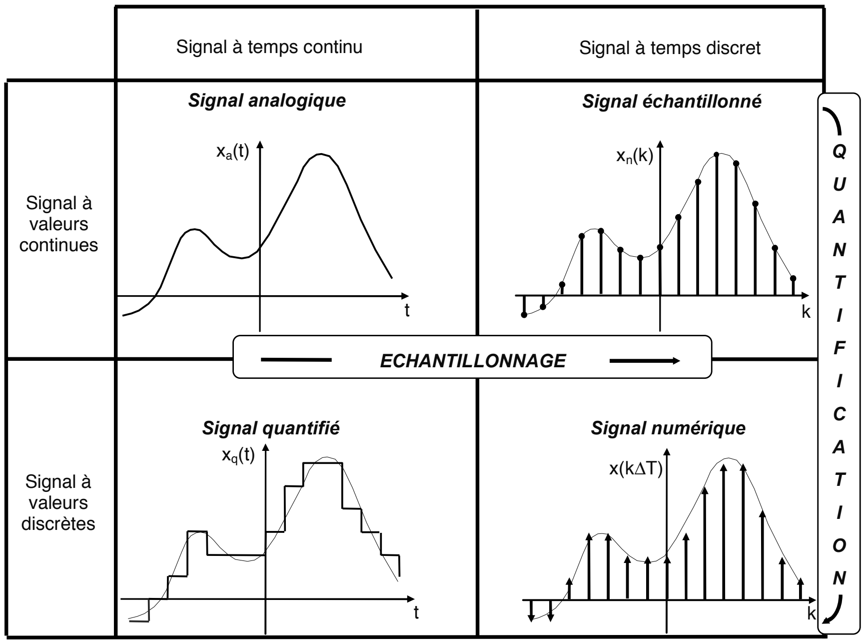

Figure I.2. *Classification continu – discret.*

1.3. Classification énergétique

Une classification peut être établie à partir des notions d'énergie ou de puissance d'un signal.

Au signal $x(t)$ (fonction complexe ou réelle du temps t) supposée être une tension (lorsque les dimensions sont précisées), sont associées :

- l'énergie E_x définie sur le support temporel T, si elle existe, par :

$$E_x = \int_{(T)} |x(t)|^2 dt \qquad [V^2 \cdot s] \text{ ou } [V^2/Hz] \text{ ou } [J] \text{ dans une résistance de } 1\ \Omega$$

- la puissance moyenne P_x définie, si elle existe, par :

$$P_x = lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{(T)} |x(t)|^2 dt \qquad [V^2] \text{ ou } [W] \text{ dans une résistance de } 1\ \Omega$$

avec le module carré de la fonction $x(t)$ application de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par : $|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$, où $x^*(t)$ est le conjugué de $x(t)$.

Pour un signal périodique, la puissance moyenne se ramène à un calcul sur une période T_0 :

$$P_x = \frac{1}{\mathrm{T}_0} \int_{(\mathrm{T}_0)} |x(t)|^2 dt$$

A partir de ces définitions, apparaissent deux classes de signaux :

- signaux à énergie finie : $E_x < +\infty$ (signaux à puissance nulle)

Ce sont des signaux de type transitoire, c'est-à-dire dont le support temporel est fini.

$$L^2(\infty) = \left\{ x(t) \text{ tel que } lim_{T\to\infty} \int_T |x(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$ / définition de l'espace de Hilbert

- signaux à puissance moyenne finie : $P_x < +\infty$ (signaux à énergie infinie),

Ce sont des signaux périodiques ou des signaux aléatoires permanents.

$$L_p^2(\infty) = \left\{ x(t) \text{ tel que } lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_T |x(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

Les signaux « réels » (rencontrés en pratique) sont des signaux à énergie finie, c'est-à-dire observés sur un temps fini. Cependant les signaux à puissance moyenne finie sont souvent utilisés par exemple pour modéliser des générateurs de signaux périodiques. Il faut aussi noter que certains signaux théoriques n'appartiennent ni à l'une ni à l'autre de ces catégories.

Exemples

(i) Soit le signal $x(t)$ défini par $x(t) = a\, cos(2\pi f_0 t), a \in \mathbb{R}$.

L'énergie de ce signal est infinie, et sa puissance moyenne est finie et égale à $\frac{a^2}{2}$.

□ **Démonstration**

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x^2(t)dt = \frac{a^2}{T_0}\int_{(T_0)} cos^2(2\pi f_0 t)dt = \frac{a^2}{2T_0}\int_{(T_0)}\big(1 + cos(4\pi f_0 t)\big)dt$$

$$= \frac{a^2}{2T_0}\left\{\int_{(T_0)} dt + \int_{(T_0)} cos(4\pi f_0 t)dt\right\} = \frac{a^2}{2T_0}\{T_0 + 0\} = \frac{a^2}{2} \qquad \blacksquare$$

(ii) Soit le signal $x(t)$ défini par $x(t) = 1$ pour $t \in \left[-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right]$ et 0 ailleurs.

L'énergie totale de ce signal de ce signal est finie et vaut θ. Sa puissance moyenne est nulle.

□ **Démonstration**

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\theta/2}^{\theta/2} dt = \theta \qquad \text{et} \qquad P_x = lim_{T\to\infty}\frac{\theta}{T} = 0 \qquad \blacksquare$$

Puissance et énergie : analogie avec l'électricité

La Figure I.3 montre un dipôle électrique quelconque qui est traversé par un courant d'intensité i et dont la tension à ses bornes est u (le sens de ces grandeurs correspondant à la convention récepteur en électricité).

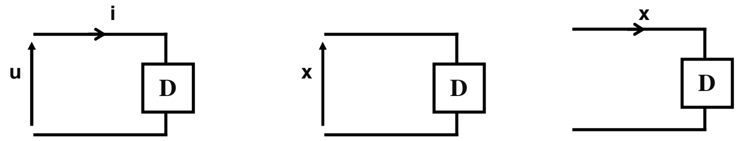

Figure I.3. *Dipôle traversé par le courant i (ou x) et de tension à ses bornes u (ou x).*

Par définition, la puissance instantanée fournie au dipôle est :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad [W] \text{ ou } [VA]$$

Dans le cas, où le dipôle est une résistance R, cette puissance s'exprime, en utilisant la loi d'Ohm $\big(u(t) = Ri(t)\big)$, de la façon suivante :

$$p(t) = Ri^2(t) = u^2(t)/R$$

L'énergie $E(t_1, t_2)$ $[J]$ dissipée pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est donnée par :

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = R\int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

La puissance moyenne $\mathrm{P}(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2)$ [W] correspondante est :

$$\mathrm{P}(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) = \frac{1}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1}\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \mathrm{p}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1}\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \mathrm{i}^2(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{R}(\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1)}\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \mathrm{u}^2(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Par analogie pour un signal $x(t)$, il est possible de définir les grandeurs suivantes :

- l'énergie normalisée : $E_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$

- la puissance moyenne normalisée : $P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$

- la valeur efficace : $x_{ef}(t_1, t_2) = \sqrt{P_x(t_1, t_2)}$

Le signal $x(t)$ peut donc être associé à une tension aux bornes d'une résistance normalisée ($R = 1\,\Omega$) ou bien à un courant la traversant. Lorsque l'espace temps s'étend de moins l'infini à plus l'infini, ces relations deviennent générales et sont alors celles données précédemment.

2. Représentations en temps et en fréquence

Pré-requis : aucun

La description la plus simple (et la plus classique) d'un signal est donnée par la représentation des variations de son amplitude en fonction du temps.

Une représentation très concrète pour le physicien est donnée par la représentation des amplitudes du signal en fonction de la fréquence : cette représentation est appelée spectre du signal.

La description d'un signal par sa forme d'onde ou par son spectre est complète : elle renferme toutes les informations contenues dans le signal. Cependant, chacune met en évidence des propriétés différentes : la représentation comme fonction du temps (la forme d'onde) montre par exemple clairement l'instant d'émission et la durée de chacun des éléments du signal ; la représentation comme fonction de la fréquence (le spectre) montre directement l'amplitude des différentes composantes fréquentielles du signal.

Exemple

Un signal sinusoïdal $x(t)$ de période T_0 (donc de fréquence $f_0 = 1/T_0$) présente un spectre qui montre explicitement que le signal contient la fréquence f_0.

Un tel signal observé sur un espace temps infini, ne peut être qu'un signal purement théorique. En pratique, un signal sinusoïdal sera observé à travers une fenêtre temporelle, par exemple l'écran d'un oscilloscope. Son spectre sera alors modifié comme illustré sur la Figure I.4. En particulier, le pic observé à la fréquence f_0, dans le cas du signal observé sur un support infini, se transforme en un sinus cardinal centré sur f_0 dans le cas du signal tronqué. De nouvelles fréquences sont donc apparues lors de la prise en compte du signal sur un support fini.

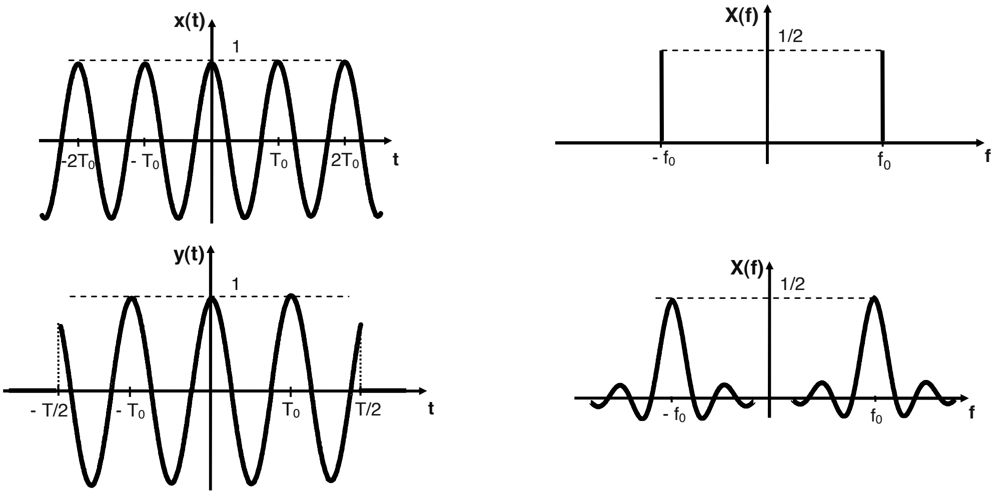

Figure I.4. *Représentation en temps et en fréquence de signaux sinusoïdaux de support infini et fini.*

La justification des spectres présentés sur la Figure I.4 sera établie ultérieurement, et en particulier l'apparition de fréquences négatives (voir distribution de Dirac, transformée de Fourier et produit de convolution).

3. Transformée de Fourier – TF

Pré-requis : classification des signaux

Tout signal peut être représenté dans l'espace temps et dans l'espace des fréquences. Ces deux représentations sont différentes mais complémentaires. La transformée de Fourier, opérateur réversible, permet de passer de l'une à l'autre.

3.1. Transformée de Fourier

Définition

Soit $x(t)$ une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La transformée de Fourier de $x(t)$ est définie lorsqu'elle existe par :

$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot exp(-2\pi jft)\, dt \qquad \text{application de } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$= A(f) + jB(f) = |X(f)| \cdot exp\big(j\phi(f)\big)$$

où $|X(f)|$ est le module et $\phi(f)$ la phase.

$X(f)$ est appelé spectre (complexe) de $x(t)$. Il faut noter que dans certains ouvrages, le spectre peut être défini comme le module ou le module carré de la transformée de Fourier ; le terme « complexe » sera implicite, dans la suite.

Les variables temps (t) et fréquence (f) sont dites les variables conjuguées de la transformation.

Généralisation : définition de l'opérateur TF

$$TF[\Delta] = \int_{\mathbb{R}} \Delta \cdot exp(-2\pi jft)\, dt$$

Condition d'existence

Toute fonction sommable (fonction à énergie finie, donc telle qu'en l'infini positif ou négatif, elle tend vers zéro) admet une transformée de Fourier ; c'est une condition suffisante. En conséquence, toutes les fonctions existant physiquement vérifient cette condition, essentiellement car elles sont observées sur un temps fini et ont des amplitudes bornées.

Exemple

Soit $x(t)$ la fonction rectangle définie par :

$$x(t) = rect_T(t/T\,) = 1, \forall t \in [-T/2, T/2]$$
$$0, ailleurs.$$

Sa transformée de Fourier existe ($x(t)$ signal à énergie finie) et s'écrit sous la forme suivante :

$$X(f) = \frac{sin(\pi fT)}{\pi f} = Tsinc(\pi fT)$$

où la fonction sinus cardinal est définie par : $sinc(x) = sin(x)/x$ (à noter que π est parfois sous-entendu dans la notation).

□ **Démonstration**

$$\text{TF}[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} rect_T\left(\frac{t}{T}\right) e^{-2\pi jft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-2\pi jft} dt$$

$$= \frac{e^{-2\pi jft}\big|_{-T/2}^{+T/2}}{-2\pi jft} = \frac{1}{\pi f} \cdot \frac{e^{\pi jfT} - e^{-\pi jfT}}{2j} = \frac{sin(\pi fT)}{\pi f} = \frac{Tsin(\pi fT)}{\pi fT} = Tsinc(\pi fT) \qquad ■$$

La Figure I.5 donne une illustration du signal $x(t) = rect_T(t/T)$ et de sa transformée de Fourier $X(f) = Tsinc(\pi f T)$.

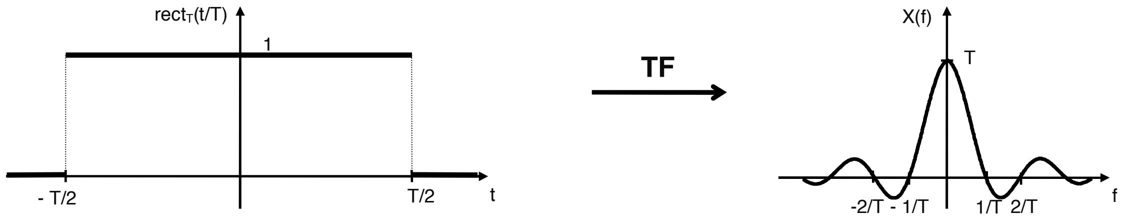

Figure I.5. *Représentation en temps et en fréquence de la fenêtre rectangle.*

Il peut être noté que les notations de la fonction rectangle rencontrées dans la littérature sont très diverses. Le choix de notation utilisée ici est justifié ultérieurement.

3.2. Transformée de Fourier inverse

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$x(t) = \overline{\mathrm{TF}}[X(f)] = \int_{\mathbb{R}} X(f) \cdot exp(2\pi j f t) df$$

ou plus généralement, sous la forme :

$$\overline{\mathrm{TF}}[\Delta] = \int_{\mathbb{R}} \Delta \cdot exp(2\pi j f t) df$$

L'opérateur TF inverse peut aussi être noté TF^{-1}.

3.3. Remarques

(i) La transformée de Fourier est un opérateur dual : ◊(t) ↔ ∇(f) | ∇(t) ↔ ◊(f).

Autrement dit, la transformée de Fourier inverse par exemple d'une fonction rectangle, sera un sinus cardinal dans l'espace temps. L'utilisation de la dualité peut permettre de déterminer des transformées de Fourier.

(ii) A un signal de support étroit correspond un spectre de support large, et inversement. L'exemple précédent illustre cette propriété lorsque la variable T varie.

(iii) L'unité de $X(f)$ est celle de $x(t)$ que multiplie le temps. Par exemple, si $x(t)$ est une tension, son spectre $X(f)$ s'exprime en V.s ou V/Hz.

(iv) L'approche mathématique du spectre d'un signal conduit à parcourir l'espace temps de moins l'infini à plus l'infini, et corrélativement l'espace des fréquences de moins l'infini à plus l'infini pour obtenir $x(t)$ à partir de $X(f)$. Ainsi des fréquences négatives apparaissent dans la représentation spectrale.

Physiquement, seules les fréquences positives ont véritablement un sens. Cependant, il est prudent (et pratique) de donner les représentations fréquentielles complètes pour éviter des erreurs lors des manipulations spectrales : par exemple une translation en fréquence peut conduire à faire apparaître des fréquences physiques à partir de fréquences qui étaient initialement négatives.

4. Propriétés de la transformée de Fourier

Pré-requis : transformée de Fourier

4.1. Linéarité

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, TF[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 TF[x_1(t)] + \alpha_2 TF[x_2(t)]$$

Cette propriété peut être apparentée au théorème de superposition. La transformée de Fourier d'une somme pondérée de signaux est égale à la somme des transformées de Fourier pondérées de chacun des signaux (Figure I.6).

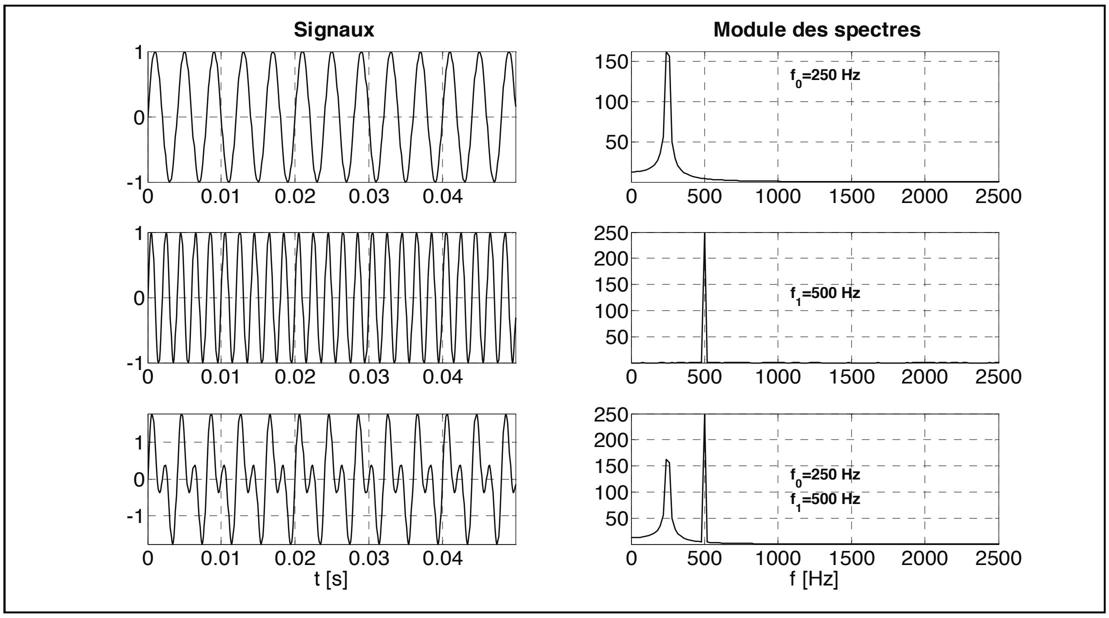

Figure I.6. *Illustration de la propriété de linéarité de la TF.*

□ **Démonstration**

Linéarité de l'opérateur intégration ■

4.2. Transposition

$$TF[x(-t)] = X(-f)$$

Une inversion des temps pour le signal entraîne un retournement des fréquences de son spectre.

□ **Démonstration**

$$\mathrm{TF}[x(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-2\pi jft}dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{+2\pi jfu}du \qquad / \; u = -t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-2\pi j(-f)u}du = X(-f)$$ / identification avec la définition de la TF ■

4.3. Conjugaison

$$\mathrm{TF}[x^*(t)] = X^*(-f)$$

La conjugaison d'un signal entraîne le retournement et la conjugaison de son spectre.

Pour un signal réel, $X(f) = X^*(-f)$ car $\mathrm{TF}[x(t)] = \mathrm{TF}[x^*(t)]$. Cette propriété est appelée symétrie hermitienne.

□ **Démonstration**

$$\mathrm{TF}[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-2\pi jft}dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi j(-f)t}dt\right]^* = X^*(-f)$$ ■

4.4. Translation : théorème du retard

$$\mathrm{TF}[x(t-t_0)] = X(f)e^{-2\pi jft_0}$$

Un décalage dans le temps du signal n'influe par sur le module de son spectre. Seul apparaît un terme de phase $e^{-2\pi jft_0}$ dû à la translation temporelle.

□ **Démonstration**

$$\mathrm{TF}[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-2\pi jf(u+t_0)}du \qquad / \; u = t - t_0$$

$$= e^{-2\pi jft_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-2\pi jfu}du = e^{-2\pi jft_0}X(f) \qquad \blacksquare$$

4.5. Modulation

$$\mathrm{TF}[x(t)e^{2\pi jf_0t}] = X(f-f_0)$$

La multiplication d'un signal par une harmonique pure de fréquence f_0 translate le spectre du signal de f_0. Il s'agit du principe des modulations d'amplitude.

Sur la Figure I.7, un signal sinusoïdal de fréquence $100\,Hz$ est multiplié par une fonction cosinus de fréquence $2{,}5\,kHz$. Les allures temporelles et fréquentielles du signal initial et du signal obtenu sont représentées. Le résultat fait apparaître deux fréquences à $2400\,Hz$ et $2600\,Hz$, soit $2500\,Hz\,\pm 100\,Hz$: le spectre contenant les fréquences $-100\,Hz$ et $+100\,Hz$ est donc translaté autour de la fréquence $2500\,Hz$.

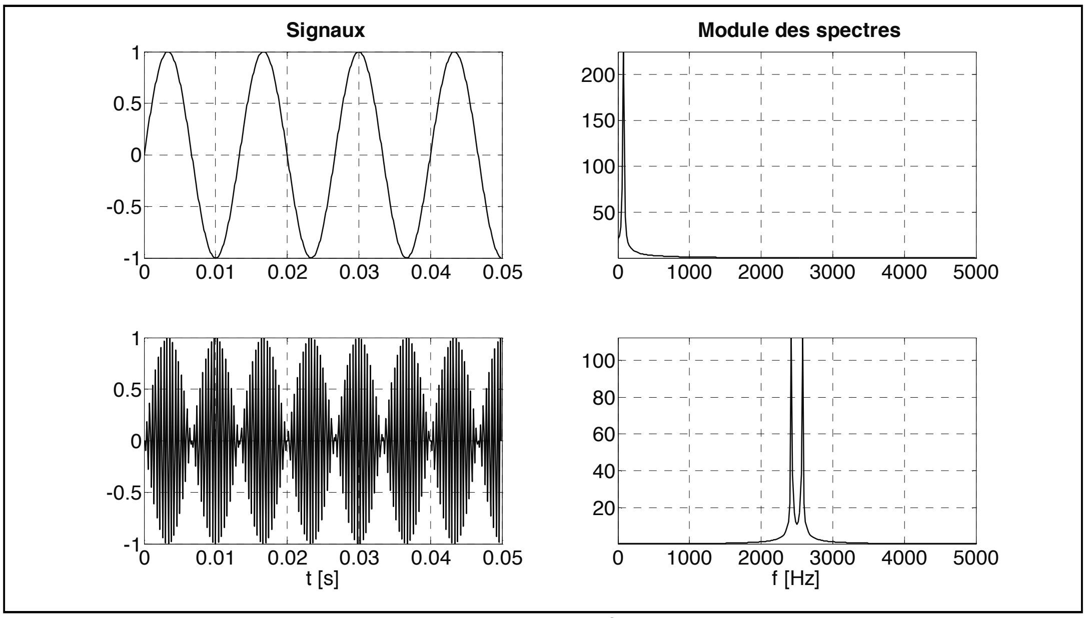

Figure I.7. *Modulation par une fonction sinusoïdale.*

□ **Démonstration**

$$\mathrm{TF}[x(t)e^{2\pi jf_0t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{2\pi jf_0t}e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi j(f-f_0)t}dt = X(f-f_0) \qquad \blacksquare$$

4.6. Dilatation – contraction

$$\mathrm{TF}[x(at)] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Une dilatation dans le domaine du temps « ralentit » le signal et entraîne donc une diminution de des fréquences qu'il contient.

Ainsi par exemple comme l'illustre la Figure I.8 un disque 45T écouté à 33T (a = 45/33, dilatation du temps) paraît plus grave (contraction des fréquences) ; et inversement écouté à 78T, plus aigu (contraction du temps et dilatation des fréquences). Au changement de tonalité, se rajoute une