Factoriser

Quelques résultats indispensables

a, b et c désignent des nombres complexes.

❶ $\boxed{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$

❷ $\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

❸ On suppose que a, b et c sont des nombres réels, avec $a\neq 0$.

On considère le **trinôme du second degré :** ax^2+bx+c.

Pour tout réel x, on a : $\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$, où x_1 et x_2 sont les solutions complexes (éventuellement identiques) de l'équation $ax^2+bx+c=0$, c'est-à-dire, en notant $\Delta=b^2-4ac$:

- Si $\Delta\geq 0$, $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta<0$, $x_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, x_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
  Dans ce cas, l'équation n'a pas de solution de réelle, et ax^2+bx+c ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

⚠ **Attention !** N'oubliez pas le facteur a dans la forme factorisée !

❹ P désigne un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$. Si x_0 est une racine de P (c'est-à-dire un réel tel que $P(x_0)=0$), alors il existe un polynôme Q (de degré $n-1$) tel que pour tout x : $\boxed{P(x)=(x-x_0)Q(x)}$.

Remarque : Le point ❸ est un cas particulier du point ❹, avec $n=2$.

À vous !

Calculatrice INTERDITE

Factoriser au maximum dans $\mathbb{R}$ les expressions suivantes :

On s'échauffe

1. $4(x+1)-3x(x+1)+(x+1)(5x-7)$

2. $4x^2+4x-3$

3. $2x^2-4$

4. $3x^2+\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$

5. $9x^2-6\sqrt{2}x+2$

6. $0{,}01x^2-0{,}006x+0{,}0009$

7. $x^2-\mathrm{e}$

8. x^2-x^4

9. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3x+\frac{1}{3}\right)^2$

10. $(3-3x)(2x-5)+4x-10-2x(2x-5)$

11. $\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x-1)+2x^2-x$

12. $x(x-2)+3x^2-12$

13. $(4x+1)(x-1)+\left(\frac{1}{4}x+4\right)(1-x)-2x(x-1)$

14. $4x^2-4x+1+(x+2)(2x-1)$

15. $-1+\left(1+x-x^2\right)^2$

On accélère

16. $\left(2x-1\right)^2-\left(x^2-2\right)^2$

17. x^4+x^2-2

18. $x^2+x+\dfrac{1}{4}+\left(2x+1\right)\left(x^2-\dfrac{3}{4}\right)$

19. $\left(x^2-4\right)^2-\left(4x^2-1\right)^2$

20. $\left(x^2+2x-8\right)\left(x+1\right)+\left(x^2+2x+1\right)\left(x-2\right)$

21. $2x^3-4x^2+\left(2-x\right)\left(4x-2\right)$

22. $\left(x^2-1\right)\left(2x-1\right)+\left(x+3\right)\left(2x^2-3x+1\right)$

23. $\left(x-2\right)\left(x^3-1\right)-x^2\left(x^2-3x+2\right)$

24. x^6-1

25. x^6-7x^3-8

On finit au top

26. x^3+x^2-2

27. x^3-2x^2-5x+6

28. $2x^3+9x^2+3x-4$

29. x^4+1

30. x^4+x^2+1

Corrigés

Dans chaque exercice, on notera $P(x)$ l'expression que l'on veut factoriser.

1. $P(x)=4\underline{(x+1)}-3x\underline{(x+1)}+\underline{(x+1)}(5x-7)=\underline{(x+1)}(2x-3).$

> **Remarque :** On peut également développer l'expression pour se ramener à un trinôme du second degré, et appliquer la factorisation du point ❸, mais c'est plus long !

2. $P(x)=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=(2x-1)(2x+3).$

> **Remarque :** On a utilisé la factorisation du point ❸.
>
> La dernière étape n'est pas indispensable, mais elle permet d'avoir des coefficients entiers, ce qui est toujours plus facile à manipuler…

3. $P(x)=\left(\sqrt{2}x+2\right)\left(\sqrt{2}x-2\right).$

> **Remarque :** On a utilisé l'identité remarquable du point ❷, avec $a=\sqrt{2}x$ et $b=2$. Il n'y a pas que des entiers dans la vie !

4. $P(x)=3\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)(3x+2).$

> **Remarque :** On a utilisé la factorisation du point ❸.

5. $P(x)=\left(3x-\sqrt{2}\right)^2.$

> **Remarque :** On a utilisé l'identité remarquable du point ❶, avec $a=3x$ et $b=-\sqrt{2}$.

6. $P(x)=\left(10^{-1}x\right)^2-6\times10^{-3}x+\left(3\times10^{-2}\right)^2=\left(10^{-1}x-3\times10^{-2}\right)^2$
$=(0{,}1x-0{,}03)^2.$

Remarque : On a utilisé l'identité remarquable du point ❶.
Le recours à l'écriture scientifique limite les erreurs de calcul dans les produits !

7. $P(x)=\left(x+e^{\frac{1}{2}}\right)\left(x-e^{\frac{1}{2}}\right)$.

Remarque : On a utilisé l'identité remarquable du point ❷, avec $a=x$ et $b=e^{\frac{1}{2}}$, sachant que $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2=e$.

8. $P(x)=x^2\left(1-x^2\right)=x^2(1+x)(1-x)$.

9. $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}+3x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}-3x-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{6}-4x\right)\left(2x+\frac{5}{6}\right)$.

Remarque : On a utilisé l'identité remarquable du point ❷ avec $a=x-\frac{1}{2}$ et $b=3x+\frac{1}{3}$, mais on pouvait également développer l'expression pour se ramener à un trinôme du second degré, et appliquer la factorisation du point ❸.

10. $P(x)=(3-3x)\underline{(2x-5)}+2\underline{(2x-5)}-2x\underline{(2x-5)}=5\underline{(2x-5)}(1-x)$.

Remarque : On a mis en évidence un facteur commun, mais on pouvait également développer l'expression pour se ramener à un trinôme du second degré, et appliquer la factorisation du point ❸.

11. $P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\underline{(2x-1)}+x\underline{(2x-1)}=\underline{(2x-1)}\left(2x+\frac{1}{2}\right)$.

Remarque : Ici encore, on peut développer l'expression pour se ramener à un trinôme du second degré, et appliquer la factorisation du point ❸.

12. $P(x)=x\underline{(x-2)}+3\underline{(x-2)}(x+2)=2\underline{(x-2)}(2x+3)$.

Remarque : On a utilisé l'identité remarquable du point ❷, avec $a=x$ et $b=2$, pour faire apparaître un facteur commun.

On pouvait également développer l'expression et appliquer la factorisation du point ❸.

13. $P(x)=(4x+1)\underline{(x-1)}-\left(\frac{1}{4}x+4\right)\underline{(x-1)}-2x\underline{(x-1)}$

$=\underline{(x-1)}\left(\frac{7}{4}x-3\right)$.

Remarque : On peut ici encore développer l'expression et appliquer la factorisation du point ❸, mais les calculs sont plus fastidieux ! Je vous rappelle que la machine à calculer est proscrite.

14. $P(x)=\underline{(2x-1)}^2+(x+2)\underline{(2x-1)}=\underline{(2x-1)}(3x+1)$.

15. $P(x)=\left(1+x-x^2+1\right)\left(1+x-x^2-1\right)=x(1-x)\left(-x^2+x+2\right)$

$=x(1-x)(2-x)(x+1)$.

Remarque : On a utilisé la factorisation du point ❷, avec $a=1+x-x^2$ et $b=1$.

Si on développe l'expression initiale, on trouve facilement la factorisation par x, mais il reste à factoriser un polynôme de degré 3, ce qui n'est pas toujours aisé …

16. $P(x)=\left(2x-1+x^2-2\right)\left(2x-1-x^2+2\right)$

$=(x-1)(x+3)\left(1+\sqrt{2}-x\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)$.

Remarque : On a utilisé l'identité remarquable du point ❷, puis la factorisation du point ❸.

17. $P(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+2\right)$.

> **Remarque :** Dans un premier temps, on applique la factorisation du point ❸ avec pour variable x^2 ; on utilise ensuite l'identité remarquable du point ❷.
> L'équation $x^2+2=0$ n'a pas de solution réelle, on ne peut donc pas factoriser x^2+2 dans $\mathbb{R}$.

18. $$P(x)=\underline{\left(x+\frac{1}{2}\right)}^2+2\underline{\left(x+\frac{1}{2}\right)}\left(x^2-\frac{3}{4}\right)=\underline{\left(x+\frac{1}{2}\right)}\left(2x^2+x-1\right)$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x-1)(x+1).$$

19. $$P(x)=\left(x^2-4+4x^2-1\right)\left(x^2-4-4x^2+1\right)=\left(5x^2-5\right)\left(-3x^2-3\right)$$
$$=15(1-x)(1+x)\left(x^2+1\right).$$

> **Remarque :** L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution réelle, on ne peut donc pas factoriser x^2+1 dans $\mathbb{R}$.

20. $P(x)=\underline{(x-2)}(x+4)\underline{(x+1)}+\underline{(x+1)}^2\underline{(x-2)}=\underline{(x+1)}\underline{(x-2)}(2x+5)$.

21. $$P(x)=2x^2\underline{(x-2)}-\underline{(x-2)}(4x-2)=\underline{(x-2)}\left(2x^2-4x+2\right)$$
$$=2(x-2)(x-1)^2.$$

22. $$P(x)=\underline{(x-1)}(x+1)\underline{(2x-1)}+(x+3)\underline{(x-1)}\underline{(2x-1)}$$
$$=\underline{(x-1)}\underline{(2x-1)}(2x+4)=2(x-1)(2x-1)(x+2).$$

23. $$P(x)=(x-2)(x-1)\left(x^2+x+1\right)-x^2(x-1)(x-2)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+1).$$

Remarque : x^3-1 s'annule pour $x=1$, d'après le point ❹, on peut donc écrire : $x^3-1=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.
En identifiant dans les deux expressions les coefficients de x^3, et les coefficients constants, on obtient immédiatement $a=1$ et $c=1$; on a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$x^3-1=(x-1)\left(x^2+bx+1\right)=x^3+(b-1)x^2+(1-b)x-1$,
qui donne $b=1$.

24. $P(x)=\left(x^3\right)^2-1=\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)$

$=(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$.

Remarque : On a dans un premier temps appliqué la factorisation du point ❷, avec $a=x^3$ et $b=1$.
On a ensuite utilisé la factorisation vue dans l'exercice précédent : $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$.
C'est une factorisation qu'il faudra retenir…
L'équation $x^2+x+1=0$ n'a pas de solution réelle (discriminant strictement négatif), on ne peut donc pas factoriser x^2+x+1 dans $\mathbb{R}$.
Pour factoriser x^3+1, on procède comme pour x^3-1 : on remarque que x^3+1 s'annule pour $x=-1$, on peut donc écrire : $x^3+1=(x+1)\left(ax^2+bx+c\right)$.
En identifiant dans les deux expressions les coefficients de x^3, et les coefficients constants, on obtient immédiatement $a=1$ et $c=1$; on a donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$x^3+1=(x+1)\left(x^2+bx+1\right)=x^3+(b+1)x^2+(1+b)x+1$,
qui donne $b=-1$.
L'équation $x^2-x+1=0$ n'a pas de solution réelle, on ne peut donc pas factoriser x^2-x+1 dans $\mathbb{R}$.