Introduction
(Le choc de Cantor ; le critère de Whitehead et Russell)

à Émile Lesaffre[1]

Considérons un cercle ou un carré, placés dans un repère cartésien d'origine O et d'axes X et Y, où l'abscisse X porte la droite numérique tandis que sur l'ordonnée Y s'élève l'échelle des entiers, d'une part positifs 1, 2, 3,..., *n*,... (rassemblés dans **N**), d'autre part négatifs. Ce repère va nous permettre une typologie générale des objets mathématiques, parmi lesquels nous devons d'abord distinguer deux cas principaux.

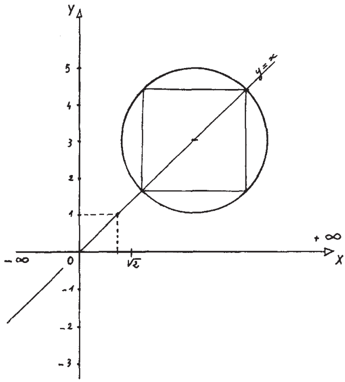


Fig. 1 : Objets pythagoriciens dans un repère cartésien

1. Les échanges sur les fondements des mathématiques avec Jacques Dubuacs, Ivor Grattan-Guinness, Yannis Moschovakis et Denis Vernant m'ont été très stimulants. Je les en remercie vivement, tout en assumant la responsabilité entière du présent ouvrage.

Les objets mathématiques, en effet, peuvent être soit des objets *ordinaires* soit des objets *remarquables*. Les objets ordinaires sont des objets comme par exemple un *rectangle* de côtés x et y, un *cercle* de centre (x, y), une *droite* d'équation $y = ax + b$ (c'est-à-dire qui part sur Y du point b puis s'élève avec une « pente » a indiquant comment multiplier chaque pas horizontal x pour obtenir la hauteur verticale de la marche y), etc. Nous dirons de surcroît que, relativement à un *carré* (dont on peut dire qu'il est une figure *élémentaire* mais pour lequel il a fallu spécifier que ses deux côtés sont égaux) un *rectangle* se qualifie comme objet *archi-élémentaire*. Les objets remarquables sont ceux qui interviennent dans une expression telle que la célèbre formule d'Euler : $e^{i\pi} = -1$, où, à la gauche du signe « = », e est la base naturelle de la fonction logarithme (dont la courbe représentative est symétrique à celle de l'exponentielle), $i = \sqrt{-1}$ et $\pi = 3{,}14\ldots$ (avec son infinité de décimales) tandis qu'à droite du même signe on a simplement le reflet négatif de l'entier positif + 1. Dans une telle formule il faut distinguer deux rôles essentiellement différents. Il y a les *objets critiques*, c'est-à-dire ou bien des objets qui, pour le mathématicien, sont des témoins d'obstacles, comme le nombre π qui est en quelque sorte le deuil de la *quadrature du cercle* ou $i = \sqrt{-1}$, prototype du *nombre imaginaire* dont Leibniz disait qu'il est un « amphibie entre l'être et le néant », ou bien des objets qui, pour le non-mathématicien, sont encore des obstacles, quand par exemple il se demande ce que peut bien être un logarithme. Mais à droite du signe « = » (ou même déjà sous le radical $\sqrt{\ }$) nous trouvons le signe – 1 qui contribue, à gauche, à créer le caractère critique mais qui, à droite, ramène toutes les notions problématiques de la gauche à une seule notion mieux connue et joue donc le rôle d'une pierre de touche pour les objets critiques. C'est ce que nous appellerons un *objet-critère* en mathématiques. Nous atteignons ainsi le but ou « télos » de notre typologie : parmi les objets remarquables, les objets-critères correspondent à ce que nous appellerons en mathématiques les *objets distingués*. Les objets ordinaires sont essentiellement les *figures* de la géométrie et les *nombres* de l'arithmétique. Nous dirons aussi qu'il s'agit des *Objets de Pythagore*. Dans le repère XY, les objets *distingués* se trouvent sur ses points remarquables. À l'origine O se trouve le nombre zéro = 0. Comme premiers échelons de l'ordonnée, on trouve au-dessus de 0 l'unité 1 et au-dessous son symétrique – 1. Et sur la droite numérique D, aux deux extrémités de l'ensemble **R** des nombres réels sur l'abscisse, on trouve les directions $-\infty$ et $+\infty$. Nous obtenons ainsi le *Triangle algébrique* de Boole :

$$\begin{array}{l} 1 \\ | \\ 0 \rightarrow \infty. \end{array}$$

Et nous dirons aussi en nous référant à Whitehead et Russell[1] que les objets distingués des mathématiques, au nombre de 3, sont des *Objets de Boole*.

Quant à savoir ce qui fait la différence entre les objets ordinaires et les objets distingués, nous obtenons une double réponse d'après la distinction de Leibniz entre *extension* et *intension* (ou compréhension). En extension, les objets de Pythagore se signalent au fait qu'ils sont en nombre infini, tandis que les objets de Boole, non seulement sont en nombre fini, mais peuvent se compter sur les doigts de la main. En intension, les objets de Pythagore se caractérisent par le fait qu'ils obéissent aux Tables de la Loi (celles qui sont définies au dos des protège-cahiers par les tables de + et les tables de ×). Par exemple si n et m sont deux nombres ordinaires, nous aurons : $n < n + m$.

Les objets distingués, par opposition, sont au-dessus des lois :

$$n + 0 = n$$

$$n \times 1 = n$$

$$\infty + n = \infty$$

Ce sont eux qui font la loi : « Tu ne diviseras pas par *zéro* ».

Le discernement, parmi les objets mathématiques, des objets distingués, permet d'en obtenir des Analogues. En algèbre de Boole, en particulier, on distingue entre une classe universelle U (qui contient tout) et une classe vide ø (qui ne contient rien). Elles peuvent aussi se noter respectivement 1 et 0. De même, on peut définir pour la négation (de la forme non-p, notée $\neg p$) une *Table de Vérité* :

1. *Principia Mathematica*, théorèmes *24.23 à *24.27.

p	¬p
0	1
1	0

Cette table fait voir que, par analogie avec le Tout et le Rien qui sont respectivement une sorte de 1 et de 0 *ontologiques*, le Vrai et le Faux sont une sorte de 1 et de 0 *logiques*.

Une fois faite la distinction entre les objets ordinaires et les objets distingués, puisque cette distinction est double, nous pouvons nous demander s'il n'existe pas des *objets amphibies* entre l'ordinaire et le distingué. Nous appellerons de tels objets des *Objets de Bolzano* parce que ces objets ont leur caractéristique dans les propriétés paradoxales de l'infini, comme celles que répertorie Bolzano dans son livre *Les Paradoxes de l'Infini*[1].

Par une sorte d'ironie du sort qui nous fait traverser d'un seul saut toute l'histoire des mathématiques, les Objets de Bolzano ont leur paradigme dans la *Chose du Dehors* qui est à l'origine de cette histoire. C'est la Grande Pyramide où peut s'illustrer le Théorème de Thalès[2].

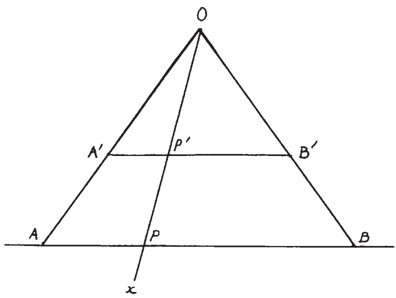


Fig. 2 : La Grande Pyramide paradoxale

1. Trad. Hourya Sinaceur, Le Seuil.
2. Cf. Michel Serres, « Ce que Thalès a vu au pied des pyramides », dans *Hermès II*, Minuit, 1972. Il s'agit ici de voir quelque chose non plus au pied des pyramides (leurs ombres proportionnelles à leurs hauteurs) mais, comme pour le théorème de Thalès, *dans* la pyramide elle-même.

Appelons en effet O le sommet de la pyramide, AB sa base et A'B' un quelconque de ses étages. Puis, partant du sommet O, imaginons une droite Ox qui coupe la base au point P et l'étage au point P' en balayant tout l'angle AOB. Ce mouvement fait apparaître qu'à chaque point P sur la base correspond un point P' sur l'étage. Il y a donc autant de points sur l'étage que sur la base. Et pourtant, la mesure de la base est plus grande que celle de l'étage : AB > A'B' et le segment A'B' projeté sur AB n'en donne qu'une partie. D'où le premier paradoxe de l'infini : celui de la partie qui est aussi grande que le tout.

Le paradigme de ces paradoxes[1] est la bijection entre les entiers naturels et les nombres pairs :

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, 2n, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, n, & \ldots \end{array}$$

Cette bijection montre que (1) il y a autant de nombres pairs que d'entiers (puisque tout entier a son double et tout double sa moitié), cela bien que (2) l'ensemble des nombres pairs soit seulement un sous-ensemble de l'ensemble des entiers, ce que Borel en 1898 appelle (n. 1) une *partie aliquote*. Cela met en échec l'axiome d'Euclide affirmant que le tout est plus grand que la partie. Et il y a là un paradoxe non seulement paradigmatique, mais fondateur pour la doctrine de l'infini. Or des paradoxes de ce type étaient déjà connus à la fin du Moyen Âge. Ce qui situe le paradoxe fondateur dans la lignée des paradoxes décelée par J. L. Gardies[2] quand il parle de « la tradition scolastique » prenant son départ « au moins depuis Duns Scot » et s'étendant « jusqu'à Bolzano ».

Des objets de Bolzano conçus au sens visé ci-dessus se définissent a priori de la manière suivante : ce seraient des objets *au-dessus des lois* comme les objets distingués, mais aussi des objets *en nombre infini* comme les objets mathématiques ordinaires.

Cette définition nous permet de décrire l'événement que constitue, dans l'Histoire des Mathématiques et à l'échelle de cette histoire envisagée dans sa totalité, la découverte de Cantor. C'est ce qui a été vu par

1. Borel, *Leçons sur la Théorie des Fonctions* , 1898, p. 7.
2. J. L. Gardies, *Pascal entre Eudoxe et Cantor*, Vrin, p. 44 et 48. Cette tradition remonte au paradoxe de Parvipontanus.

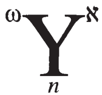
Cantor. Cantor a découvert qu'il existe des « objets de Bolzano ». Ce sont ces objets que Cantor appelle des *nombres transfinis*. Pour nous orienter dans le transfini en caractérisant d'abord (au sens leibnizien) la *duplicité* cantorienne qui l'affecte, nous conviendrons de réunir les deux symboles introduits par Cantor à son sujet en un seul : $\aleph_{\omega}$.

Dans ce symbole, la lettre *aleph*, première lettre de l'alphabet hébreu, rappelle que le transfini a un caractère *distingué* (comme 0, 1 ou ∞), tandis que la lettre *oméga* (dernière lettre de l'alphabet grec) rappelle que les $\aleph$ eux-mêmes sont en nombre infini (comme les objets ordinaires tels que les entiers naturels n ou les carrés de côté n), ce qui a pour condition que les ω soient d'abord eux aussi en nombre infini.

Nous sommes ainsi en mesure de nous repérer, pour pénétrer dans l'univers cantorien, sur la phrase où Cantor lui même a résumé toute sa découverte. C'est une phrase où il introduit simultanément deux concepts :

> « celui de la puissance... indépendante de l'ordre imposé à l'ensemble et celui du nombre ordinal qui est nécessairement lié à l'ordre imposé à l'ensemble par une règle, au moyen de laquelle l'ensemble devient *bien ordonné*... Si je redescends de l'infini au fini, je vois avec la même clarté et la même beauté comment les deux concepts redeviennent « un » et se *fondent* dans le concept de nombre entier fini[1]. »

Idée que nous pouvons résumer dans la figure suivante :



Ce que Cantor a découvert, par conséquent, c'est que parmi les objets de Boole ou objets distingués des mathématiques, l'infini (∞) se dédouble en deux formes du Nombre, celle des *ordinaux infinis* ω et celle des *cardinaux infinis* $\aleph_{\omega}$, qui se réunissent ensuite dans la finitude des nombres destinés à former la série (encore infinie cependant) des successeurs de 0 ou de 1.

---

1. Cité par Cavaillès, *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, 1938, Philosophie mathématique, Hermann, p. 86.

L'école de Pythagore avait découvert que si, sur la droite, on élève sur l'intervalle de 0 à 1 le carré de côté 1, alors le théorème de Pythagore nous donne comme *diagonale d* de ce carré, l'hypothénuse d telle que $d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$, d'où il suit que $d = \sqrt{2}$, valeur qui, quels que soient n et m, est différente de n/m. Si par conséquent nous rabattons sur la droite D la diagonale d, nous obtenons alors un point $\sqrt{2}$ qui n'est égal à aucun *rapport rationnel* n/m entre entiers naturels n et m. Par conséquent, puisque sur D se trouvent en totalité les nombres réels de l'ensemble $\mathbf{R}$, ce que l'école de Pythagore a découvert, c'est que *tout le réel n'est pas rationnel.*

Et Pythagore savait, par conséquent, que les nombres rationnels ne sont qu'une partie des nombres réels. Mais dans le paradoxe paradigmatique de l'infini, la *classe* des nombres pairs, elle aussi, n'est qu'une espèce dans le genre plus vaste des entiers naturels, et pourtant les nombres pairs sont en même nombre que les entiers naturels. Donc les rapports d'*inclusion* entre *classes*, du type $A \subset B$, laissent indécidé le nombre d'éléments dans ces classes. Par conséquent le paradoxe paradigmatique met les mathématiques devant un problème de décision. C'est ce problème que Cantor va rendre décidable en introduisant le concept d'*ensemble.*

Considérons un objet mathématique à double aspect, tel que l'objet (0, 1) envisagé, soit comme *segment* 0 — 1, soit comme ensemble des *nombres réels* de 0 à 1. La conceptualisation de Cantor illustrée par cet exemple va distinguer au sujet de l'objet mathématique essentiellement trois attributs groupés deux à deux. Un ensemble est quelque chose qui a, d'une part, une *puissance* et une *contenance* (*Macht*[1] et *Inhalt*) et d'autre part, un *cardinal* éventuellement doublé d'un *ordinal.*

La puissance d'un ensemble est le nombre cardinal de ses éléments. Mais par ailleurs, un même ensemble peut être mis dans une multiplicité d'ordres différents qui laissent le cardinal invariant. L'ordinal est donc autre chose que le cardinal. Enfin, la puissance est autre chose que la contenance ou mesure. Dans le *segment* 0 — 1, par exemple, qui est une *ligne*, la mesure est la *longueur* de cette ligne. Et cette longueur, qui est égale à 1, est une grandeur finie. Mais puisque le

---

1. Cantor dit *Mächtigkeit.*

segment 0 — 1 est l'ensemble des points de 0 à 1, et puisque ces points sont en nombre infini, le segment lui-même est un ensemble infini. Nous avons donc là un objet mathématique dont la *puissance* est infinie mais dont la *contenance* est finie. Le paradoxe de la Pyramide corrobore cette distinction. En effet, si nous y prenons comme étage le segment 0 — 1/2, la contenance a diminué de moitié mais la puissance est restée la même.

La puissance d'un ensemble est ce qui est laissé indécidé par son rapport de type $\subset$ à ses sous-ensembles : c'est le nombre de ses éléments.

La contenance d'un ensemble est ce qui sera nommé aussi sa « mesure » dans la *théorie de la mesure* qui va se développer chez Cantor et Riemann, puis chez Jordan, Borel et Lebesgue. D'où la nécessité de deux notations correspondantes. Étant donné un ensemble E, nous noterons $\Phi(E)$ la puissance de E et $M(E)$ la mesure ou contenance de E.

À partir du concept de puissance, Cantor obtient une décision sur le problème soulevé par le paradoxe paradigmatique de l'infini. Cette solution d'un paradoxe problématisant tient en trois paradoxes résolvants que nous appellerons *Triptyque paradoxal de Cantor* ou *Triptyque **Z*** (cantorien) :

$$\begin{array}{ccc} R^n & & R \\ & \mathrm{Z} & \\ Q & & N \end{array}$$

Cette figure contient les trois paradoxes sur lesquels se condense toute la théorie cantorienne des nombres cardinaux infinis.

(P1) La puissance des entiers naturels **N** est la même que celle des rationnels **Q**.

(P2) La puissance des nombres rationnels **Q** est dépassée par la puissance des réels **R**.

(P3) La puissance des puissances $\mathbf{R}^n$ de **R** ($\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, etc.) est la même que la puissance de **R**.

L'essentiel est donc ici la différence entre des plans *équipotentiels* :

$$\mathbf{R}^n — \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{Q} — \mathbf{N}$$