Chapitre premier
Courbes

1. Courbes dans $\mathbb{R}^n$, généralités

Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (fini, semi-infini ou infini) et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur I. On écrit :

$$\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\big)\,.$$

L'application γ est dite différentiable (de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$) si et seulement si toutes les fonctions γ_j $(j = 1, \ldots, n)$ sont différentiables (de classe $\mathcal{C}^p$). Dans la suite du cours, on supposera que $p = \infty$.

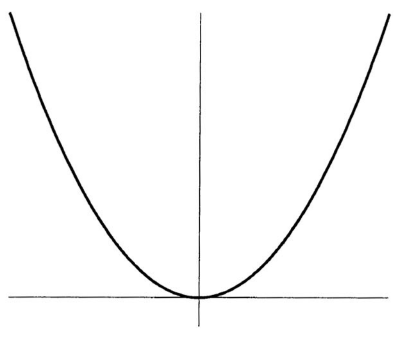
Définition I.1

On appelle courbe (paramétrée) de $\mathbb{R}^n$ la donnée d'une application différentiable $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^n$. L'image de γ, notée $\mathcal{C}$, s'appelle la courbe géométrique associée. On dit que l'application γ définit une paramétrisation de la courbe géométrique. La courbe est qualifiée de régulière si γ est une immersion, c'est-à-dire si $\gamma'(t) \neq 0$ en tout point t de I. On peut aussi dire que γ définit une paramétrisation régulière de $\mathcal{C}$. Un point $\gamma(t_o)$ de $\mathcal{C}$ tel que $\gamma'(t_o) = 0$ est appelé un point singulier de la courbe $\mathcal{C}$.

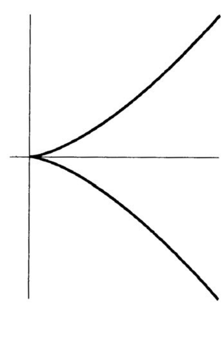
Exemples I.2

a) L'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = \big(t, t^2\big)$ a pour courbe géométrique associée $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = x^2$. Cette paramétrisation est régulière.

b) L'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = \big(t^2, t^3\big)$ définit une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 = x^3$. Dans cet exemple, la courbe présente un point singulier en $(0,0)$. Ce point singulier est appelé point de rebroussement de première espèce ou “cusp” (en anglais).



parabole $y = x^2$



cubique $y^2 = x^3$

Figures I.1

Définition I.3

Soit $\gamma(t_o)$ ($t_o \in I$) un point de $\mathcal{C}$ tel que $\gamma'(t_o) \neq 0$. La tangente au point $\gamma(t_o)$ à la courbe $\mathcal{C}$ est la droite affine passant par le point $\gamma(t_o)$ et de direction le vecteur $\gamma'(t_o)$. Le vecteur $\gamma'(t_o)$ s'appelle le vecteur vitesse. Un arc fermé d'une courbe $\mathcal{C}$ est l'image d'un intervalle fermé $[a,b] \subset I$ par $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$.

Définition I.4

Un changement de paramétrisation (admissible) α de la courbe géométrique $\mathcal{C}$ est défini par une application différentiable $\alpha : I \to J$ telle que $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Deux paramétrisations de la courbe $\mathcal{C}$ définissent le même sens de parcours de $\mathcal{C}$ si on passe de l'une à l'autre par un changement de paramétrisation tel que $\alpha'(t) > 0$.

2. Longueur d'un arc de courbe

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe et $\mathcal{A} = \gamma\big([a,b]\big)$ un arc fermé de la courbe $\mathcal{C}$.

Définition I.5

La longueur de l'arc $\mathcal{A}$ est $\displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$.

On peut montrer que la longueur ainsi définie est la limite des longueurs de lignes polygonales inscrites dans l'arc lorsque le maximum de la longueur de chaque segment de la ligne polygonale tend vers zéro.

Lemme I.6

La longueur de l'arc $\mathcal{A}$ est indépendante de la paramétrisation de cet arc.

Preuve : On note $\alpha : I = [c,d] \to [a,b] = J$ un changement (admissible) de la paramétrisation et $\psi : \gamma \circ \alpha$ la nouvelle paramétrisation. La longueur de l'arc de courbe $\mathcal{A}$ calculée avec la nouvelle paramétrisation est

$$\int_c^d \|\psi'(u)\|\, du = \int_c^d \|\gamma'\big(\alpha(u)\big)\|\, |\alpha'(u)|\, du\,.$$

Posons $t = \alpha(u)$; d'après la formule de changement de variable dans les intégrales, on obtient :

$$\int_c^d \|\psi'(u)\|\, du = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

qui est la longueur de l'arc $\mathcal{A}$ calculée avec la paramétrisation initiale. □

Exemple I.7

On considère l'exemple I.2.a donné précédemment et $[a,b] = [-1,1]$. On obtient

$$\gamma'(t) = (1, 2t), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}\,.$$

La longueur de l'arc $\mathcal{A}$ est $\displaystyle 2\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$.

3. Paramétrisation par la longueur d'arc

Définition I.8

On fixe un point $c \in [a, b]$. La longueur d'arc s comptée à partir du point $\gamma(c)$ est la fonction

$$s : t \mapsto \int_c^t \|\gamma'(u)\| \, du \,.$$

On suppose que γ définit une paramétrisation régulière. La fonction s définit un changement (admissible) de paramétrisation puisque $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. La nouvelle paramétrisation obtenue ainsi s'appelle la paramétrisation par la longueur d'arc ou paramétrisation normale.

Exemple I.9

On considère cette fois-ci à nouveau l'exemple I.2.b où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $q(t) = \left(t^2, t^3\right)$. Cette paramétrisation n'est pas régulière puisque le point $(0, 0)$ est un point singulier. On se restreint à l'intervalle $]0, +\infty[$. La longueur d'arc comptée à partir de $(0, 0)$ est

$$s : t \mapsto \int_0^t u\sqrt{4 + 9u^2} \, du = \frac{1}{27}\left(4 + 9t^2\right)^{3/2} - \frac{8}{27} \,.$$

Cette courbe fut le premier exemple connu (autre que la droite) de courbe algébrique dont la longueur d'arc est une fonction algébrique.

Proposition I.10

Soit $\psi : s \mapsto \psi(s) = \gamma \circ s^{-1}(s)$ la paramétrisation par la longueur d'arc. Le vecteur $\psi'(s)$ est unitaire.

Preuve : On a :

$$\|\psi'(s)\| = \|\gamma'\left(s^{-1}(s)\right) \frac{1}{\|\gamma'\left(s^{-1}(s)\right)\|}\| = 1 \,.$$

Réciproquement cette propriété caractérise la paramétrisation par la longueur d'arc (au choix près de l'origine et du sens de parcours). □

Proposition I.11

Soit $\alpha :]a, b[\to]c, d[$ un changement de paramétrisation (admissible) de la courbe $\mathcal{C}$ tel que γ et $\gamma \circ \alpha$ ont un vecteur vitesse unitaire. Alors nécessairement $\alpha(t) = \pm t + t_0$.

Preuve : Les égalités

$$1 = \|\gamma' \circ \alpha(t)\| = \|\gamma'(s)\| \, |\alpha'(t)| = |\alpha'(t)|$$

impliquent $\alpha(t) = \pm t + t_0$. □

4. Courbure des courbes du plan

Pour les courbes du plan $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, il est plus commode d'adopter la notation suivante :

$$\gamma(t) = \big(x(t),\, y(t)\big)\,.$$

L'équation d'un cercle $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$ dépend de trois paramètres (α, β, R). On détermine ces paramètres de sorte que le cercle ait un contact d'ordre 3 au moins au point (x, y) avec la courbe. Ce contact s'exprime par :

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 &= 0\ , \\ (x-\alpha)x' + (y-\beta)y' &= 0\ , \\ (x-\alpha)x'' + (y-\beta)y'' + (x'^2 + y'^2) &= 0\ . \end{aligned}$$

Des deux dernières équations on tire (si $x'y'' - y''x' \neq 0$)

$$x - \alpha = \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}\ , \qquad y - \beta = -\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}\,.$$

En substituant dans la première, il vient :

$$R = \frac{\big(x'^2+y'^2\big)^{3/2}}{|x'y''-y'x''|}\,.$$

On détermine ainsi le rayon R et les coordonnées (α, β) de son centre. Ce cercle s'appelle *cercle osculateur* à la courbe au point (x, y).

On nomme *courbure moyenne* d'un arc le rapport de l'angle γ formé par les tangentes à la courbe aux extrémités de l'arc à la longueur Δs de cet arc. La courbure en un point (x, y) est la limite vers laquelle tend la courbure moyenne d'un arc commençant en ce point lorsque la longueur de cet arc tend vers zéro.

Proposition I.12

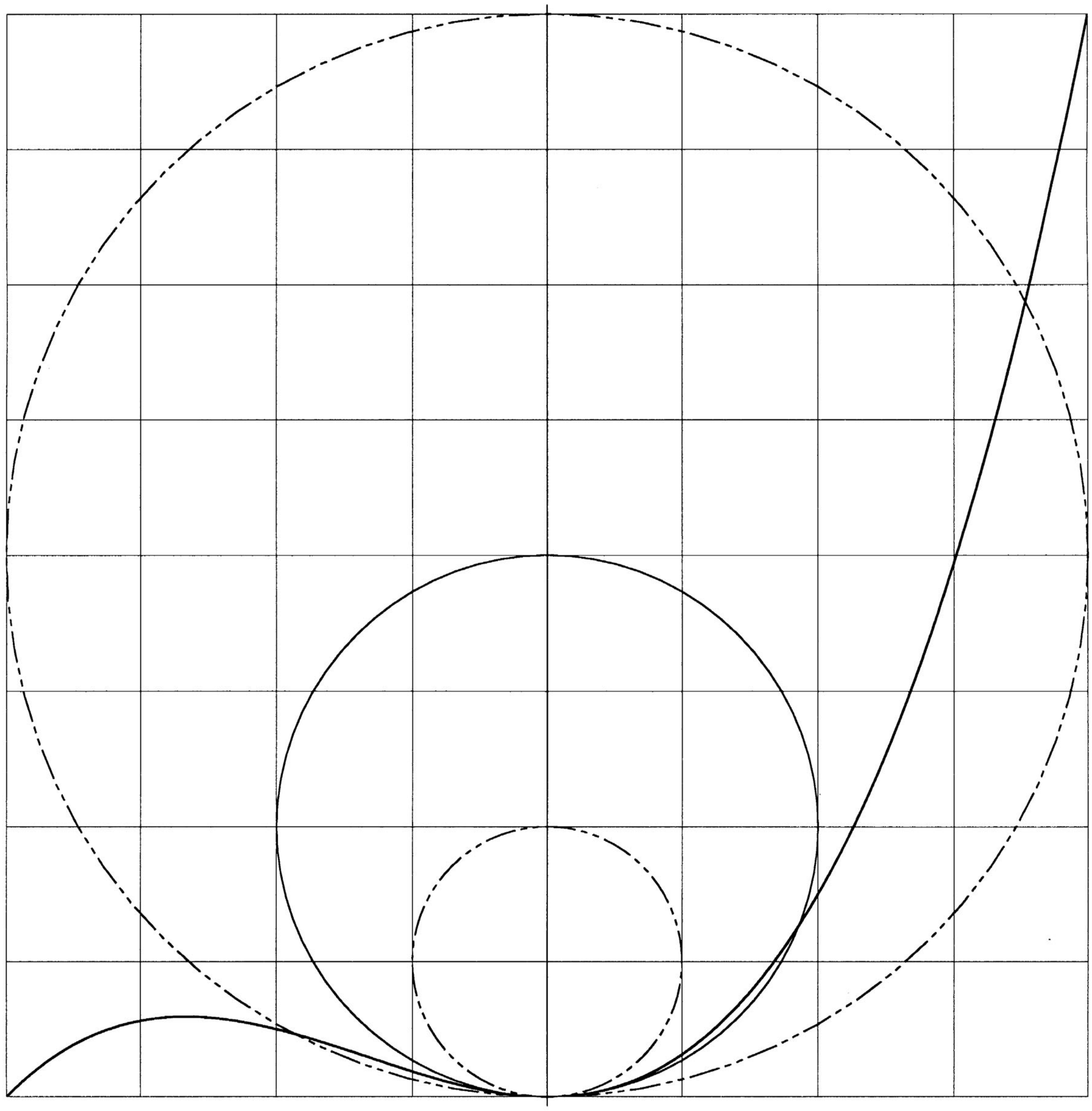
La courbure en un point est égale (au signe près) à l'inverse du rayon du cercle osculateur.

Preuve : Soit $\dfrac{y'}{x'}$ le coefficient angulaire de la tangente en (x, y), $\dfrac{y'+\Delta y'}{x'+\Delta x'}$ celui de la tangente au point $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. On désigne par γ l'angle de ces deux tangentes. Il vient

$$\tan(\varphi) = \frac{\dfrac{y'+\Delta y'}{x'+\Delta x'} - \dfrac{y'}{x'}}{1 + \dfrac{y'+\Delta y'}{x'+\Delta x'}\cdot\dfrac{y'}{x'}} = \frac{x'\Delta y' - y'\Delta x'}{(x'+\Delta x')x' + (y'+\Delta y')y'}\,.$$

Un calcul au premier ordre donne $\tan(\varphi) \sim \varphi$ puis $\Delta y' = y''\,dt$, $\Delta x' = x''\,dt$, qui donne

$$x'\Delta y' - y'\Delta x' = (x'y'' - y'x'')\,dt \qquad \text{et} \qquad (x'+\Delta x')x' + (y'+\Delta y')y' = x'^2 + y'^2\,. \square$$



Deux cercles tangents (en tireté), et le cercle osculateur (en traits pleins), ont été tracés ; on observe, dans cet exemple, que la courbe traverse le cercle osculateur.

Figure I.2 : Cercle osculateur .

Enfin $\Delta s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$; la courbure $c = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\varphi}{\Delta s}$ vaut donc $\dfrac{x'y'' - y'x''}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} \cdot$

On vérifie par conséquent que $|c| = \dfrac{1}{R} \cdot$

Soit $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $\mathcal{R} : (x,y) \mapsto (-y,x)$. Cette application est la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et définit la structure complexe du plan $\mathbb{R}^2$. On note $\langle u,v\rangle$ le produit scalaire usuel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La fonction courbure c peut ainsi s'écrire :

$$\mathrm{c} : t \mapsto \mathrm{c}(t) = \frac{\big\langle \gamma''(t), \mathcal{R}\big(\gamma'(t)\big)\big\rangle}{\|\gamma'(t)\|^3}\,.$$

Noter qu'elle dépend de la paramétrisation. Dans la discussion qui suit, on fait explicitement apparaître la paramétrisation dans la notation $t \mapsto \mathrm{c}[\gamma](t)$.

Proposition I.13

Soit $h :]c,d[\to]a,b[$ un changement de paramétrisation admissible. La courbure $\mathrm{c}[\gamma\circ h](t)$ exprimée dans la nouvelle paramétrisation est égale à

$$\mathrm{c}[\gamma\circ h](t) = \mathrm{sign}\big(h'(t)\big)\,\mathrm{c}[\gamma]\big(h(t)\big)\,.$$

Preuve : Soit $\psi = \gamma\circ h$; on obtient de suite :

$$\psi' = \big(\gamma'\circ h\big)h', \qquad \psi'' = \big(\gamma''\circ h\big)h'^2 + \big(\gamma'\circ h\big)h''\,,$$

$$\mathrm{c}[\psi](t) = \frac{\big\langle \psi''(t), \mathcal{R}\big(\psi'(t)\big)\big\rangle}{\|\psi'(t)\|^3} = \frac{h'^3}{|h'^3|}\cdot\frac{\big\langle \gamma''\circ h, \mathcal{R}\big(\gamma'\circ h\big)\big\rangle}{\|\gamma'\circ h\|^3}$$

ce qui démontre le résultat. □

5. Exemples de courbes du plan

(Voir les figures p. 9 et suivantes).

1) L'ellipse $\gamma : t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$.
La courbure est $\mathrm{c}[\gamma](t) = \dfrac{ab}{\big(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\big)^{3/2}}\,.$

2) La spirale logarithmique $\gamma : t \mapsto \big(a\,e^{bt}\cos t\,,\ a\,e^{bt}\sin t\big)$.
La courbure est $\mathrm{c}[\gamma](t) = \dfrac{1}{a\,e^{bt}\sqrt{1+b^2}}\,.$

3) Les cycloïdes $\gamma : t \mapsto \big(at - b\sin t\,, a\ - b\cos t\big)$.

4) La cardioïde $\gamma : t \mapsto 2(1+\cos t)\big(\cos t\,,\ \sin t\big)$.

5) La cissoïde de Diocles $\gamma : t \mapsto 2a\Big(\dfrac{t^2}{1+t^2}\,,\ \dfrac{t^3}{1+t^2}\Big)\,.$
Cette courbe était utilisée par les Grecs dans les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle.

6) La tractrice $\gamma : t \mapsto a\Big(\sin t\,,\ \cos t + \ln\tan\dfrac{t}{2}\Big)\,.$

7) La spirale de Cornu $\gamma : t \mapsto \Big(\displaystyle\int_0^t \sin(u^2)\,du\,,\ \int_0^t \cos(u^2)\,du\Big)\,.$

8) Les courbes de Lissajous $\gamma : t \mapsto \big(a\sin(nt+c)\,,\ b\sin mt\big)$.

6. Courbes et isométries du plan

1) Rappels sur les isométries.

On peut donner une définition générale des isométries dans le cadre d'un espace vectoriel euclidien. Il nous suffit ici de rappeler la définition pour $\mathbb{R}^n$ équipé du produit scalaire usuel.

Définition I.14

Une transformation linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserve l'orientation si $\det(A) > 0$ et renverse l'orientation si $\det(A) < 0$. Une transformation linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est orthogonale si elle conserve le produit scalaire : $\langle Ap, Aq\rangle = \langle p, q\rangle$.
Une transformation orthogonale A satisfait $\det A = \pm 1$. Si $\det A = 1$, A est une rotation. Si $\det A = -1$, et $n = 2$, A est une symétrie par rapport à une droite.

Définition I.15

Une transformation affine $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une transformation de la forme $F(p) = Ap + q$, où A est une transformation linéaire. Si A est une rotation, F est appelée déplacement. Si $\det A = -1$, c'est un anti-déplacement.

Définition I.16

Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ est une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui conserve les distances :

$$\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\| \, .$$

Proposition I.17

Une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement si c'est la composée d'une translation et d'une transformation orthogonale. L'application F est donc affine.

Définition I.18

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. L'image de la courbe $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ par F est la courbe définie par $F \circ \gamma$.

2) Courbes et isométries du plan.

Dans le cas du plan, on démontre le

Théorème I.19

La valeur absolue de la courbure et la dérivée de la longueur d'arc sont invariantes par les isométries. La courbure change de signe après un antidéplacement et est conservée par les déplacements.

Preuve : Soit $F : p \mapsto Ap + F(0)$ une isométrie. L'image de la courbe $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ par F est donnée par $\psi(t) = A\gamma(t) + F(0)$. Donc $\psi'(t) = A\gamma'(t)$, $\psi''(t) = A\gamma''(t)$ et il vient $\|\psi'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$. De plus, la courbure est

$$\mathrm{c}[\psi](t) = \frac{\langle \psi''(t), \mathcal{R}\,\psi'(t)\rangle}{\|\psi''(t)\|^3} = \frac{\langle A\gamma''(t), \mathcal{R}\,A\gamma'(t)\rangle}{\|A\gamma''(t)\|^3} \, .$$

Le théorème résulte alors du lemme suivant dont on laisse la démonstration en exercice : $\square$

Lemme I.20

Soit A une transformation orthogonale, alors $A\,\mathcal{R} = \varepsilon\,\mathcal{R}\,A$, avec $\varepsilon = \det A$.

Théorème I.21

Soient γ, ψ deux courbes régulières définies sur le même intervalle $]a, b[$. Supposons que γ et ψ ont la même courbure aux points correspondants à la même valeur de l'abscisse curviligne, alors il existe un déplacement qui transforme une courbe dans l'autre.

Preuve : La proposition I.13. permet de supposer que $\|\gamma'(s)\| = \|\psi'(s)\| = 1$. On fixe $s_0 \in]a, b[$. Il existe une translation qui applique $\gamma(s_0)$ sur $\psi(s_0)$ et une rotation qui transforme le vecteur $\gamma'(s_0)$ en le vecteur $\psi'(s_0)$. Soit donc F l'isométrie du plan obtenue en composant les deux ; on obtient

$$F\big(\gamma(s_0)\big) = \psi(s_0), \qquad F\big(\gamma'(s_0)\big) = \psi'(s_0)\,.$$

On va montrer que $F \circ \gamma = \psi$. Pour cela on considère la fonction

$$f(s) = \frac{1}{2}\|\big(F \circ \gamma\big)'(s) - \psi'(s)\|^2\,.$$

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \big\langle \big(F \circ \gamma\big)''(s) - \psi''(s)\,,\ \big(F \circ \gamma\big)'(s) - \psi'(s)\big\rangle \\
&= -\big\langle \big(F \circ \gamma''(s)\big)\,,\ \psi'(s)\big\rangle - \big\langle \big(F \circ \gamma'(s)\big)\,,\ \psi''(s)\big)\big\rangle \\
&= -\big\langle \mathrm{c}[\gamma]\big(F \circ \mathcal{R}\,\gamma'(s)\big)\,,\ \psi'(s)\big\rangle - \big\langle \mathrm{c}[\psi]\big(F \circ \gamma'(s)\big)\,,\ \mathcal{R}\,\psi'(s)\big\rangle \\
&= -\,\mathrm{c}[\gamma]\big\langle \big(F \circ \mathcal{R} + \mathcal{R}^t \circ F\big)\gamma'(s)\,,\ \psi'(s)\big\rangle = 0
\end{aligned}$$

car F commute avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} + \mathcal{R}^t = 0$ ($\mathcal{R}^t$ est la transposée de $\mathcal{R}$). La fonction f est donc constante ; étant nulle en s_0, elle est nulle sur $]a, b[$. On en déduit que $s \mapsto F \circ \gamma(s) - \psi(s)$ est constante, donc nulle puisque $F\big(\gamma(s_0)\big) = \psi(s_0)$, ce qui achève la démonstration. □

7. Courbes du plan définies par une équation implicite $f(x, y) = 0$

Considérons l'ensemble des points (x, y) d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$ où $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert U. Supposons de plus que la différentielle df ne s'annule pas en un point (x_0, y_0). L'une au moins des deux dérivées partielles ne s'annule pas. Supposons par exemple que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Par continuité, il existe un voisinage V de (x_0, y_0) sur lequel $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites (l'énoncé général est donné en III.2) assure l'existence d'un voisinage $V' \subset V$ de (x_0, y_0) tel qu'il existe une fonction γ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\big\{(x, y) \in V' \,/\, f(x, y) = 0\big\} = \big\{(x, y) \in V' \,/\, y = \gamma(x)\big\}\,.$$