

TABLE DES MATIÈRES

I – Courbes

I.1.	Courbes dans \mathbb{R}^n , généralités	1
I.2.	Longueur d'un arc de courbe	2
I.3.	Paramétrisation par la longueur d'arc	3
I.4.	Courbure des courbes du plan	4
I.5.	Exemples de courbes du plan	6
I.6.	Courbes et isométries du plan	7
I.7.	Courbes du plan définies par une équation implicite $f(x, y) = 0$	8
I.8.	Courbes : étude locale d'une courbe au voisinage d'un point singulier et branches infinies	14
I.9.	Courbes dans l'espace \mathbb{R}^3	15
I.10.	Exercices	20

II – Surfaces

II.1.	Définition, exemples, plan tangent.	25
II.2.	Exemples de surfaces : les quadriques.	26
II.3.	Courbes tracées sur des surfaces de \mathbb{R}^3	26
II.4.	La première forme fondamentale.	32
II.5.	La seconde forme fondamentale.	34
II.6.	Le « Theorema Egregium » de Gauss	38
II.7.	Théorème de Gauss–Bonnet et formule de Girard.	38
II.8.	Exercices	39

III – Sous-variétés de \mathbb{R}^n

III.1.	Rappels des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel	45
III.2.	Sous-variétés de \mathbb{R}^n	45
III.3.	Applications : le théorème de Lagrange et le lemme de Morse	47
III.4.	Exercices	50

IV – Formes différentielles sur un ouvert U de \mathbb{R}^n

IV.1.	Notion de 1-forme différentielle et intégrale d'une 1-forme différentielle sur un arc de courbe	53
IV.2.	Notion de k -forme différentielle	54
IV.3.	L'algèbre extérieure et la différentielle	55
IV.4.	Formes différentielles et changement de coordonnées	56
IV.5.	Exercices	57

V – Systèmes différentiels

V.1.	Le théorème fondamental d'existence des solutions des équations différentielles	59
V.2.	Systèmes newtoniens à un degré de liberté	60
V.3.	Champs du plan	61
V.4.	Systèmes newtoniens à deux degrés de liberté	64
V.5.	Systèmes newtoniens à un nombre quelconque de degrés de liberté	76
V.6.	Exercices	77

VI – Champs de vecteurs

VI.1.	Introduction et notations	81
VI.2.	Le produit intérieur d'une forme différentielle par un champ de vecteurs	82
VI.3.	Applications du produit intérieur : la divergence et le rotationnel	83
VI.4.	Nouvelle interprétation de la notion de forme différentielle	84
VI.5.	La dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs	85
VI.6.	Flot local d'un champ de vecteurs et théorème fondamental de la dérivée de Lie	85
VI.7.	Crochet de deux champs de vecteurs	86
VI.8.	Hypersurfaces dans \mathbb{R}^n et champs de vecteurs tangents à des hypersurfaces	87
VI.9.	Le lemme de Poincaré	89
VI.10.	Exercices	90

VII – Systèmes hamiltoniens et géométrie symplectique	
VII.1.	Formulation des équations de Hamilton, forme symplectique 93
VII.2.	Exemples de systèmes hamiltoniens 94
	1) Exemple du plan 94
	2) Le flot géodésique sur la sphère 96
VII.3.	Transformations symplectiques, fonction génératrice 97
VII.4.	L'équation de Hamilton–Jacobi 99
VII.5.	Crochets de Poisson 100
VII.6.	Le flot géodésique sur l'ellipsoïde 100
VII.7.	Exercices 103
VIII – Systèmes lagrangiens et calcul variationnel	
VIII.1.	Calcul variationnel 107
VIII.2.	Quelques exemples 108
VIII.3.	Systèmes hamiltoniens associés aux équations de Lagrange 109
VIII.4.	Exercices 110
IX – Variétés différentiables	
IX.1.	Définition des variétés à bord 113
IX.2.	Application différentiable d'une variété différentiable dans une autre 114
IX.3.	Champs de vecteurs et formes différentielles sur une variété différentiable 114
IX.4.	Orientation d'une variété différentiable 115
IX.5.	Exemples de variétés différentiables : les sphères et les espaces projectifs 116
IX.6.	Partition de l'unité associée à un atlas d'une variété 117
IX.7.	Intégration des formes différentielles sur une variété 118
IX.8.	Exercices 120
X – Fibré sur une variété, le fibré tangent et le fibré cotangent	
X.1.	Fibrés vectoriels topologiques et différentiables 125
X.2.	Le fibré tangent TM et le fibré cotangent T^*M 126
X.3.	Forme symplectique canonique sur T^*M . Notion de variété riemannienne et définition du flot géodésique sur une variété riemannienne 127

X.4.	Connexion linéaire, exemple de la connexion de Levi–Civita, transport parallèle	127
X.5.	Notion de tenseur, exemples des tenseurs de courbure et du tenseur de Ricci	131
X.6.	Exercices	132
Solutions des exercices		
	Chapitre I	135
	Chapitre II	146
	Chapitre III	163
	Chapitre IV	169
	Chapitre V	170
	Chapitre VI	180
	Chapitre VII	184
	Chapitre VIII	191
	Chapitre IX	197
	Chapitre X	202
	Bibliographie	207
	Notations	209
	Index	211