

Table des matières

Présentation de la collection	3
Comment utiliser ce livre?	5
Quelques conseils pour bien apprendre	7
SAVOIRS	9
Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire	10
Thème 2 - Déterminants	13
Thème 3 - Réduction des endomorphismes	16
Thème 4 - Espaces préhilbertiens et euclidiens	19
Thème 5 - Espaces vectoriels normés de dimension finie	25
Thème 6 - Intégration sur un intervalle	32
Thème 7 - Compléments sur les séries numériques	36
Thème 8 - Suites et séries de fonctions	38
Thème 9 - Théorèmes d'interversion de symboles	42
Thème 10 - Séries entières	44
Thème 11 - Fonctions vectorielles. Arcs paramétrés	48
Thème 12 - Équations différentielles et systèmes différentiels linéaires	52
Thème 13 - Calcul différentiel	56
Thème 14 - Probabilités sur un espace dénombrable	60
Thème 15 - Variables aléatoires réelles discrètes	64
SAVOIR-FAIRE	73
Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire	74
Comment résoudre un problème d'algèbre linéaire?	74
Montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou (et) génératrice	74
Utiliser le théorème du rang	76
Utiliser l'existence d'un supplémentaire	76
Montrer que n sous-espaces vectoriels sont supplémentaires	77
Étudier la stabilité d'un sous-espace vectoriel	77
Savoir utiliser les matrices par blocs	78
Montrer que deux matrices sont semblables	79
Utiliser les propriétés de la trace	79
Calculer les puissances d'une matrice carrée	80
À vous de jouer	82

Thème 2 - Déterminants	87
Comment calculer un déterminant	87
Reconnaître un cas connu	87
Utiliser le caractère de multilinéarité	88
Utiliser des opérations élémentaires sur des rangées	89
Développer selon une rangée	90
Utiliser un polynôme auxiliaire	91
À vous de jouer	93
Thème 3 - Réduction des endomorphismes	96
Comment réduire un endomorphisme?	96
Déterminer les éléments propres	96
Prouver qu'un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable	97
Utiliser les propriétés du polynôme caractéristique	99
Réaliser effectivement la diagonalisation d'une matrice carrée	99
Réaliser effectivement la trigonalisation d'une matrice carrée	100
Comment calculer des puissances de matrices avec l'outil de réduction et utiliser ces puissances?	102
Déterminer par réduction les puissances $p^{\text{èmes}}$ d'une matrice	102
Utiliser la diagonalisation pour étudier les suites numériques	104
À vous de jouer	107
Thème 4 - Espaces préhilbertiens et euclidiens	111
Comment montrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur E ?	111
Appliquer la définition si $E = \mathbb{R}^n$	111
Appliquer la définition si $E = \mathbb{R}_n[X]$	112
Appliquer la définition si $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$	112
Appliquer la définition si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	113
Comment utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz?	114
Reconnaître le produit scalaire utilisée	114
Mettre en pratique le cas d'égalité	115
Comment résoudre un problème où intervient l'orthogonalité?	115
Utiliser la définition de l'orthogonalité	116
Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt	117
Calculer le projeté orthogonal d'un vecteur	118
Construire la matrice d'une projection orthogonale	119
Reconnaître la matrice d'une projection orthogonale	119
Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel	120
Calculer la valeur d'un minimum	121
Comment étudier une isométrie vectorielle $\phi \in O(E)$?	122
Revenir à la définition	122
Construire une réflexion	122
Utiliser la matrice associée	123
Comment montrer et exploiter qu'un endomorphisme est symétrique?	124
Revenir à la définition	124
Utiliser sa matrice dans une base orthonormée	126
À vous de jouer	127
Thème 5 - Espaces vectoriels normés de dimension finie	131
Comment montrer que $\ \cdot \ $ est une norme sur E ?	131
Revenir à la définition	131
Utiliser le produit scalaire associé s'il y a lieu	131

Comment montrer que d est une distance sur E ?	132
Revenir à la définition	132
Passer par la norme associée	132
Comment étudier la convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E ?	133
Appliquer directement la définition	133
Utiliser les coordonnées des suites	134
Utiliser les propriétés algébriques des suites	134
Comment étudier une fonction de E dans F ?	135
Appliquer la définition adéquate	135
Utiliser les propriétés algébriques de transport	136
Utiliser les fonctions composantes	137
Utiliser la caractérisation séquentielle	137
Utiliser le fait que f est lipschitzienne	137
Utiliser au besoin la linéarité ou la multilinéarité	138
Comment étudier les propriétés topologiques d'une partie de E ?	138
Appliquer la définition adéquate	138
Utiliser des suites à valeurs dans E	139
Passer éventuellement au complémentaire	140
Utiliser des situations connues	141
Utiliser une fonction continue auxiliaire	141
À vous de jouer	143
Thème 6 - Intégration sur un intervalle	146
Comment étudier la nature d'une intégrale?	146
Utiliser la règle de comparaison pour les fonctions positives	146
Utiliser la règle des équivalents pour les fonctions positives	146
Utiliser le changement de variables	147
Utiliser la convergence absolue	148
Utiliser le théorème d'intégration par parties	148
Utiliser la définition de la convergence	149
Utiliser les propriétés des intégrales	150
Utiliser les séries pour étudier l'intégrabilité d'une fonction	151
À vous de jouer	152
Thème 7 - Compléments sur les séries numériques	156
Comment étudier une série numérique?	156
Utiliser le théorème de comparaison série-intégrale	156
Savoir utiliser la formule de Stirling	156
Utiliser la règle de D'Alembert	157
Utiliser le théorème spécial des séries alternées	157
Utiliser le produit de Cauchy	159
À vous de jouer	160
Thème 8 - Suites et séries de fonctions	164
Comment étudier une suite ou une série de fonctions?	164
Étudier la convergence simple	164
Étudier la convergence uniforme	164
Étudier la convergence normale d'une série de fonctions	166
Étudier la continuité de la somme d'une série de fonctions	166
Étudier la dérivabilité de la somme d'une série de fonctions	167
Étudier le caractère C^k de la somme d'une série de fonctions	168
Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition	168
À vous de jouer	170

Thème 9 - Théorèmes d'interversion de symboles	173
Comment utiliser ces théorèmes d'interversion ?	173
Utiliser le théorème de convergence dominée	173
Utiliser le théorème d'intégration terme à terme	174
Procéder si le théorème d'intégration terme à terme échoue	175
Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres	176
Utiliser le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres	177
À vous de jouer	178
Thème 10 - Séries entières	182
Comment déterminer un rayon de convergence ?	182
Utiliser des développements en série entière connus	182
Utiliser la règle de D'Alembert pour les séries numériques	182
Encadrer le rayon de convergence	183
Utiliser la comparaison de coefficients	184
Utiliser le produit de Cauchy de deux séries entières	184
Comment calculer la somme d'une série entière ?	185
Mettre en avant une combinaison linéaire de sommes connues	185
Utiliser une équation différentielle auxiliaire	187
Partir d'une relation entre différents termes consécutifs	187
Comment effectuer un développement en série entière ?	188
Mettre en avant une combinaison linéaire	188
Utiliser la dérivation ou l'intégration	189
Utiliser une équation différentielle vérifiée par f	189
Utiliser la série de Taylor associée	191
Utiliser une fonction à valeurs complexes	193
À vous de jouer	194
Thème 11 - Fonctions vectorielles et arcs paramétrés	197
Comment dériver une fonction vectorielle, une application linéaire ou bilinéaire ?	197
Utiliser les fonctions composantes	197
Utiliser un développement limité à l'ordre 1	197
Utiliser les formules de dérivation du cours	198
Comment étudier un arc paramétré ?	200
Obtenir une relation entre x et y	201
Réduire l'intervalle d'étude I de l'arc Γ	201
Utiliser la tangente en un point t_0	204
Tracer une courbe paramétrée plane	205
À vous de jouer	207
Thème 12 - Équations et systèmes différentiels	210
Comment résoudre une E.D.L du 1er ordre ?	210
Trouver les solutions de l'équation homogène (EH)	210
Trouver directement y_p si a est constant	211
Utiliser la méthode de la variation de la constante	212
Comment résoudre un S.D.L du 1er ordre ?	214
Résoudre (S) si A est constante, diagonalisable et $B(t) = 0$	215
Résoudre (S) si A est constante, trigonalisable et $B(t) = 0$	216
Résoudre (S) si A est constante, diagonalisable et $B(t) \neq 0$	218
Résoudre (S) en étant guidé, si A est n'est pas constante	221
Comment résoudre une E.D.L du second ordre ?	222
Résoudre (EH) avec a et b constants, de manière directe	222
Résoudre (EH) si a et b constants avec un S.D.L	223
Trouver y_p de manière directe (a, b constants et $c(t)$ simple)	224

Trouver avec un S.D.L y_p avec a, b constants et $c(t)$ simple	225
Trouver y_p (non nulle) sous forme d'un D.S.E	226
À vous de jouer	229

Thème 13 - Calcul différentiel	233
Comment étudier une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q	233
Étudier le caractère C^1 d'une fonction sur un ouvert	234
Utiliser la règle de la chaîne	234
Trouver les extremums sur D d'une fonction de classe C^1	235
Utiliser le théorème de Schwarz	237
Résoudre une équation aux dérivées partielles	239
Appliquer le calcul différentiel à la géométrie	242
À vous de jouer	243

Thème 14 - Probabilités sur un espace dénombrable	246
Comment résoudre un problème de probabilité?	247
Modéliser une situation	247
Utiliser les propriétés d'une probabilité	248
Utiliser la formule des probabilités totales	248
Utiliser la formule des probabilités composées	249
Utiliser la formule de Bayes	249
À vous de jouer	249

Thème 15 - Variables aléatoires réelles discrètes	253
Comment déterminer la loi de probabilité d'une v.a.r.d?	253
Utiliser un calcul direct de probabilité	253
Revenir à la définition d'une probabilité	254
Reconnaître une loi usuelle	255
Utiliser la fonction de répartition F_X	259
Utiliser la série génératrice G_X	260
Passer par des probabilités conditionnelles	262
Comment déterminer l'espérance et la variance d'une v.a.r.d?	266
Utiliser la définition de $E(X)$ et de $V(X)$	266
Reconnaître une loi usuelle	267
Utiliser les propriétés de $E(X)$ et de $V(X)$	268
Utiliser le D.S.E de la série génératrice g_X	269
Comment étudier un couple (X, Y) ou des lois transformées de X_1, \dots, X_n ?	270
Étudier un couple de v.a.r.d	270
Montrer ou infirmer l'indépendance de v.a.r.d	272
Étudier une somme de v.a.r.d	273
Étudier la v.a.r.d $\min(X_1, \dots, X_n)$ ou $\max(X_1, \dots, X_n)$	274
Comment faire des approximations ou des estimations en probabilité?	275
Utiliser l'inégalité de Markov	276
Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	277
Utiliser la loi faible des grands nombres	278
Approcher une loi binomiale par une loi de Poisson	280
À vous de jouer	281

CORRIGÉS DES EXERCICES	285
---	------------