Séquence 1 - Algèbre

Pour cette première séquence de travail, il est proposé une brève révision des équations et des inéquations du premier degré ou s'y ramenant — parties A et B — et l'étude des problèmes du second degré ou s'y ramenant.

Objectifs :
• savoir résoudre les équations du second degré.
• savoir résoudre les inéquations du second degré.
• savoir résoudre les équations et les inéquations se ramenant au second degré.

1. Les équations

Pour résoudre des équations vous disposez de deux outils : les manipulations de base des égalités et la propriété d'intégrité qui demande de savoir factoriser et donc de connaître les identités remarquables.

a. Rappels sur les deux opérations

On connaît 4 opérations : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. En réalité deux de ces opérations sont vraiment différentes : l'addition et la multiplication.
En effet :

- soustraire un nombre c'est additionner son **opposé**.

  Rappel : l'opposé d'un nombre a, noté $-a$, est le nombre qui additionné à a donne 0 ; ou encore c'est la solution de l'équation $a + x = 0$.

  Attention ! La notation $-a$ ne signifie pas que ce nombre est négatif mais qu'il s'agit de l'opposé de a ; (si a est positif $-a$ est négatif si a est négatif $-a$ est positif ! (par exemple : $-(-3) = 3$)

- diviser par un nombre c'est multiplier par son **inverse.**

  Rappel : l'**inverse** d'un nombre a **non nul**, noté $\dfrac{1}{a}$ ou a^{-1}, est le nombre qui multiplié par a donne 1 ; ou encore c'est la solution de l'équation $ax = 1$.

Exercice 1. Pourquoi 0 n'a-t-il pas d'inverse ?

b. Développer, factoriser

Avant de manipuler une égalité on est souvent conduit à les réduire. Pour ce faire on est conduit à utiliser une propriété liant la multiplication à l'addition appelée *distributivité de la multiplication par rapport à l'addition*.

(1-1) Propriété de distributivité : pour tous réels a, b, c on a : $ab + ac = a(b + c)$.
Observons cette égalité : $ab + ac$ est une *somme*, c'est la somme de deux *termes* ab et ac ; alors que $a(b + c)$ est le *produit* de deux *facteurs* a et $(b + c)$.

- Transformer un produit en somme s'appelle ***développer***

$$a(b+c) \xrightarrow{\text{développement}} ab+ac$$

- Transformer une somme (ou une différence !) en un produit s'appelle ***factoriser***.

$$ab+ac \xrightarrow{\text{factorisation}} a(b+c)$$

Exercice 2. Développer :

a. $(3x + 2)5y$	e. $(5y + 2x + 3)7z$
b. $(4x - 1)x$	f. $3x(5y - x - 8)$.
c. $3x(1 - 6x)$	g. $(3x + 1)(1 - 6x)$
d. $x(x + 1)(x + 2)$	h. $x(x - 1)(x - 2)$

Exercice 3. Factoriser :

a. $ab + ac$	f. $x^2y + xy^2$
b. $ab - ac$	g. $x^2y - xy^2$
c. $x^2 + x$	h. $x^2 - x$
d. $ab + ac + ad$	i. $ab - ac + ad$
e. $a^2 + ab + a$	j. $x^2 + 2x$

⚠ **Méthode :**
Si vous n'êtes pas sûr(e) de votre factorisation redéveloppez votre factorisation, vous devez retrouver la forme développée !

c. Manipulations de base des égalités

(1-2) Propriété (addition, soustraction) : On ne change pas une égalité en additionnant (ou en soustrayant) un même nombre à chacun de ses membres.
Soit en langage mathématique : $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
(le signe $\Leftrightarrow$ signifie : « équivalent à »)

(1-3) Propriété (multiplication, division) : On ne change pas une égalité en multipliant (ou en divisant) par un même nombre non nul chacun de ses membres.
Soit en langage mathématique : $a = b \Leftrightarrow a \times c = b \times c$ $(c \neq 0)$

Remarque : ces deux propriétés suffisent à résoudre toutes les équations du premier degré à une inconnue.

■ Exemple-type

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\frac{1}{2}(7x+3)-(x-1)=\frac{1}{2}(x+7)$.

$$\frac{1}{2}(7x+3)-(x-1)=\frac{1}{2}(x+7)$$

Développons $\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}-x+1=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

Réduisons $\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

On veut regrouper les x dans un même membre ; utilisons la propriété 1 et soustrayons à chaque membre $\frac{1}{2}x$ pour les faire disparaître du membre de droite ; soit : $2x+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$.

Utilisons à nouveau la propriété 1 et soustrayons $\frac{5}{2}$ à chaque membre pour se ramener à une équation du type $ax=b$ soit : $2x=1$.

Utilisons maintenant la propriété 2 en divisant chacun des membre par 2 (ou en multipliant par $\frac{1}{2}$) soit $x=1\times\frac{1}{2}$ soit $x=\frac{1}{2}$.

Conclusion : l'équation $\frac{1}{2}(7x+3)-(x-1)=\frac{1}{2}(x+7)$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}$ ou $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1.

a. $3x+5=0$

b. $3x+5=1-5x$

c. $3(x+5)=1-2x$

2.

a. $3(2-5x)+5(5+7x)=(1-3x)-(2-2x)$

b. $3(2-5x)+5(5+2x)=(1-7x)-(2-2x)$

c. $3(2-5x)+5(5+2x)=(1-7x)-(-30-2x)$

d. Propriété d'intégrité et factorisation

(1-4) Propriété (propriété d'intégrité) : si le produit de deux facteurs est nul alors l'un d'entre eux (au moins) est nul.

Soit en langage mathématique : $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$.

■ **Exemple-type : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x(1 - 5x) = 0$.**

D'après la propriété d'intégrité cette équation est donc équivalente à :

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - 5x = 0 \end{cases} \text{soit : } \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 5x = 1 \end{cases} \text{soit : } \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Conclusion *:* l'équation $3x(1 - 5x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: 0 et $\frac{1}{5}$ ou $S = \left\{0, \frac{1}{5}\right\}$

Pour pouvoir utiliser la propriété d'intégrité il faut qu'un produit soit égal à zéro, donc il faut savoir exprimer une expression sous la forme d'un produit.
Factoriser une expression c'est l'exprimer sous la forme d'un produit. Pour ce faire nous disposons de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition !

■ **Exemple-type : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $3x^2 + x = 0$**

Le membre de gauche est la *somme* de deux termes ; exprimons-le comme un *produit*. On remarque que dans chacun des termes de cette *somme* on retrouve le facteur commun x (en effet : $3x^2 = x \times 3x$ et $x = x \times 1$). Utilisons la propriété 4 : $3x^2 + x = x(3x + 1)$, on dit que $3x^2 + x$ possède une *factorisation évidente* par x.
L'équation est donc équivalente à :

$$x(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 3x + 1 = 0 \end{cases} \text{(d'après la propriété d'intégrité). Soit } \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Conclusion : l'équation $3x^2 + x = 0$ admet deux solutions $-\frac{1}{3}$ et 0 ou $S = \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$.

Si on n'observe pas de facteur commun on peut avoir recours aux identités remarquables suivantes qui jouent un rôle très important dans la pratique.

$$\boxed{\begin{array}{ll} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) & (1) \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 & (2) \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 & (3) \end{array}}$$

Méthode. Pour factoriser une expression vous devez en premier lieu :

1. Rechercher s'il n'y a pas un facteur commun à tous les termes de l'expression.
2. Voir si une des trois identités remarquables précédentes n'est pas applicable.

■ **Exemples : résoudre $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$, $x^2 - 22x + 121 = 0$, $x^2 - 5 = 0$, $x^2 + 6x + 5 = 0$.**

1. $x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9)$ puisque x est un facteur commun aux trois termes, $x^2 + 6x + 9$ n'a pas de facteur commun mais il semble être de la forme $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ donc :
$x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) = x(x + 3)^2$ d'après le (2) donc :

$$x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 0 \\ \text{ou} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \text{ ou } x+3=0 \\ \text{ou} \\ x=0 \end{cases} \text{ soit :}$$

$x = -3$ ou $x = 0$

Conclusion : **S** = $\{-3, 0\}$

2. $x^2 - 22x + 121 = x^2 - 2 \times x \times 11 + 11^2 = (x-11)^2$ d'après (3) donc :
$x^2 - 22x + 121 = 0 \Leftrightarrow (x-11)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 11 = 0$.
Conclusion : S = $\{11\}$.

3. $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ donc :

$$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{5} = 0 \\ \text{ou} \\ x + \sqrt{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Conclusion : **S** = $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

4. $x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 4 = (x+3)^2 - 4$ d'après l'égalité (1) donc :
$x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 2^2 = [(x+3)+2] \times [(x+3)-2] = (x+5)(x+1)$.
Donc $x^2 + 6x + 5 = 0$ est donc équivalente à :

$$(x+5)(x+1) = 0 \text{ soit : } \begin{cases} x+5=0 \\ \text{ou} \\ x+1=0 \end{cases} \text{ et donc : } \begin{cases} x=-5 \\ \text{ou} \\ x=-1 \end{cases}.$$

Conclusion : **S** = $\{-5, -1\}$.

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes :

a. $x(x+1) = 0$
b. $x(1-2x)(3+5x) = 0$
c. $x^2 + x = 0$
d. $(2x+1)(1-x) = 0$.
e. $x^2 - 2x = 0$
f. $x^2 - x = 0$

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 - 4 = 0$
b. $x^2 - 9 = 0$
c. $(1-2x)^2 - (3+5x)^2 = 0$
d. $x^2 - 2x + 1 = 0$
e. $x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$
f. $x^2 - 8x + 16 = 0$

Exercice 7. Soit le polynôme $P(x) = (2x-1)(x-1) + 5x - 5$

1. Développer $P(x)$; on obtient ainsi la forme développée de $P(x)$.
2. Factoriser $P(x)$; on obtient ainsi la forme factorisée de $P(x)$.
3. En utilisant la forme la mieux adaptée résoudre les équations suivantes :

a. $P(x) = 5x - 5$
b. $P(x) = -4$
c. $P(x) = 0$.

2. Les inéquations

Pour résoudre des inéquations vous disposez de deux outils : les manipulations de bases des inégalités et la règle du signe du produit qui demande de savoir factoriser et donc de connaître les identités remarquables.

a. Manipulations de base des inégalités

(2-1) Propriété (addition, soustraction) :
On ne change pas une inégalité en additionnant (ou en soustrayant) un même nombre à chacun de ses membres.
Soit en langage mathématique : $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

(2-2) Propriété (multiplication, division) :
On ne change pas une inégalité en multipliant (ou en divisant) par un même nombre *strictement positif* chacun de ses membres.
Soit en langage mathématique : $a < b \Leftrightarrow a \times c < b \times c$ (si $c > 0$)
⚠ On change de sens une inégalité en multipliant (ou en divisant) par un même nombre *strictement négatif* chacun de ses membres.
Soit en langage mathématique : ⚠ $a < b \Leftrightarrow a \times c > b \times c$ (si $c < 0$)

■ **Exemple-type : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :**

$\frac{1}{2}(7x + 3) - (x - 1) < \frac{1}{2}(9x + 7)$.

Développons $\frac{7}{2}x + \frac{3}{2} - x + 1 < \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$

Réduisons $\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} < \frac{9}{2}x + \frac{7}{2}$

On veut regrouper les x dans un même membre ; utilisons la propriété 1 et soustrayons à chaque membre $\frac{9}{2}x$ pour les faire disparaître du membre de droite ; soit : $-2x + \frac{5}{2} < \frac{7}{2}$
Utilisons à nouveau la propriété 1 et soustrayons $\frac{5}{2}$ à chaque membre pour se ramener à une inéquation du type $ax < b$ soit : $-2x < 1$
Utilisons maintenant la propriété 2 en divisant chacun des membre par -2 (ou en multipliant par $-\frac{1}{2}$) soit : $x > 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$.
(⚠ on change de sens l'inégalité car on multiplie l'inégalité par $-\frac{1}{2}$ qui est négatif !!) d'où $x > -\frac{1}{2}$

Conclusion : l'inéquation $\frac{1}{2}(7x + 3) - (x - 1) < \frac{1}{2}(9x + 7)$ admet pour ensemble solution S tous les réels strictement supérieurs à $-\frac{1}{2}$. Soit $S = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Exercice 8. Inéquations du premier degré. Résoudre les équations suivantes :

a. $x + 1 > 3$
b. $2x + 3 < x - 5$
c. $3x + 5 < 5x - 2$
d. $\frac{1}{3}(12x - 5) - 8(x - 1) \leq 0$
e. $\frac{x+6}{2} - 2\frac{x-7}{3} \geq 5x - 8$

b. Signe du produit

(2-3) Propriété (signe du produit)
1. Le produit de deux nombres est positif si et seulement si ces nombres sont de même signe.
2. Le produit de nombres est négatif si et seulement si ces nombres sont de signes différents.

3. Soit en langage mathématique :

$$* \; ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ et } b > 0 \\ \text{ou} \\ a < 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$

$$* \; ab < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \; et \; b < 0 \\ ou \\ a < 0 \; et \; b > 0 \end{cases}$$

■ **Exemple-type : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x(1 - 5x) > 0$.**

- Signe de $1 - 5x$

  $1 - 5x = 0 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

  $1 - 5x > 0 \Leftrightarrow -5x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$ (car on divise par –5 qui est négatif)

  De même $1 - 5x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$

- Signe de $3x$: c'est celui de x !
- On peut donc réaliser un tableau de signes qui permettra d'utiliser aisément la règle du signe du produit.

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$(1 - 5x)$	+		+	0	–
$3x$	–	0	+		+
$3x(1 - 5x)$	–	0	+	0	–

Conclusion : d'après la lecture de la dernière ligne de ce tableau (obtenue en utilisant la règle du signe du produit) $3x(1 - 5x) > 0$ sur $\left]0, \frac{1}{5}\right[$.

$S = \left]0, \frac{1}{5}\right[$.

Exercice 9.

1. Résoudre :
a. $2x + 1 = 0$
b. $2x + 1 > 0$
c. $2x + 1 < 0$
d. Remplir le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $2x + 1$		0	

2. Résoudre :
a. $-x + 1 = 0$
b. $-x + 1 > 0$.
c. $-x + 1 < 0$
d. Remplir le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $-x + 1$		0	

3.
a. Remplir le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
signe de $2x + 1$		0			
signe de $-x + 1$				0	
signe de $(2x + 1)(-x + 1)$		0		0	

b. Résoudre l'inéquation :
$(2x + 1)(-x + 1) > 0$

c. Résoudre :
$x^2 - x < 0$

Exercice 10. Résoudre les inégalités suivantes :

a. $(2x + 1)(x - 1) < 0$
b. $(-2x + 1)(x - 1) < 0$
c. $(2 - 5x)\ (1 + x)(3 + x) > 0$

Exercice 11. Résoudre les inégalités suivantes :

a. $x^2 - 1 < 0$
b. $x^2 + 2x + 1 > 0$