# Ces nombres qui nous fascinent

$\boxed{1}$

- le seul nombre qui divise tous les autres.

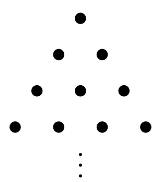
$\boxed{2}$

- le seul nombre premier pair.

$\boxed{3}$

- le nombre premier qui apparaît le plus souvent comme $2^e$ facteur premier d'un entier, soit 1 fois sur 6 (voir le nombre 199);
- le plus petit nombre premier de Mersenne ($3 = 2^2 - 1$): un nombre premier est appelé *nombre premier de Mersenne* s'il est de la forme $2^p - 1$, où $p$ est premier (voir le nombre 131 071 pour consulter la liste de tous les nombres premiers de Mersenne connus à ce jour);
- le nombre premier qui apparaît le plus souvent comme $2^e$ plus grand facteur premier d'un entier, soit environ $(1 + \log 2 + \frac{3}{2} \log 3)x/\log x$ fois parmi les entiers positifs $n \leq x$ (voir J.M. De Koninck [44]);
- le plus petit nombre triangulaire $> 1$: on dit qu'un nombre $n$ est *triangulaire* s'il existe un nombre $k$ tel que

$$n = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$



$\boxed{4}$

- le plus petit nombre $r$ qui a la propriété que chaque nombre peut s'écrire sous la forme $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$, où les $x_i$ sont des entiers non négatifs; le problème qui consiste à déterminer si, pour un nombre $k$ donné, il existe un nombre $r$ (dépendant uniquement de $k$) tel que l'équation

$$(*) \qquad n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_r^k$$

admet des solutions pour chaque nombre $n$, est dû au mathématicien anglais E. Waring qui, en 1770, énonça sans preuve que "chaque nombre est la somme de 4 carrés, de 9 cubes, de 19 bicarrés, et ainsi de suite"; si on désigne par $g(k)$ le plus petit nombre $r$ tel que l'équation $(*)$ admet des solutions pour chaque nombre $n$, Lagrange démontra en 1770 que $g(2) = 4$, L.E. Dickson démontra que $g(3) = 9$ alors que R. Balasubramanian, J.M. Deshouillers & F. Dress [12] démontraient en 1986 que $g(4) = 19$; on conjecture que $g(k) = 2^k + [(3/2)^k] - 2$ (où $[x]$ désigne le plus grand entier $\leq x$); cette formule est due à L.E. Dickson [62])[1]; ainsi en utilisant cette formule, on trouve que les valeurs de $g(k)$, pour $k = 1, 2, \ldots, 20$, sont respectivement 1, 4, 9, 19, 37, 73, 143, 279, 548, 1079, 2132, 4223, 8384, 16673, 33203, 66190, 132055, 263619, 526502, 1051899 (voir le livre d'Eric Weisstein [194], p. 1917).

$\boxed{\mathbf{5}}$

- le plus petit nombre premier de Wilson: un nombre premier $p$ est dit *premier de Wilson* s'il satisfait la congruence $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^2}$: les seuls nombres premiers de Wilson connus sont 5, 13 et 563; K. Dilcher & C. Pomerance [65] ont démontré qu'il n'y a pas d'autre nombre premier de Wilson plus petit que $5 \cdot 10^8$.

$\boxed{\mathbf{6}}$

- le plus petit nombre parfait: on dit qu'un nombre $n$ est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire si $\sigma(n) = 2n$; la suite des nombres parfaits commence comme suit: 6, 28, 496, 8128, 33 550 336; un nombre $n$ est dit *k-parfait* si $\sigma(n) = kn$: si $n_k$ désigne le plus petit nombre $k$-parfait, alors $n_2 = 6$, $n_3 = 120$, $n_4 = 30240$, $n_5 = 14\,182\,439\,040$ et $n_6 = 154\,345\,556\,085\,770\,649\,600$;
- le plus petit nombre parfait unitaire: on dit que $n$ est un *nombre parfait unitaire* si $\displaystyle\sum_{\substack{d|n \\ (d,n/d)=1}} d = 2n$, où $(d, n/d)$ désigne le plus grand commun diviseur de $d$ et $n/d$; seulement cinq nombres parfaits unitaires sont connus, soient 6, 60, 90, 87 360 et
$146\,361\,946\,186\,458\,562\,560\,000 = 2^{18} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 109 \cdot 157 \cdot 313$: ce 5$^e$ nombre a été trouvé par C.R. Wall [191] (voir également R.K. Guy [97], B3);
- le seul nombre triangulaire $> 1$ dont le carré est aussi un nombre triangulaire (W. Ljunggren, 1946): ici $6^2 = 36 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8$.

$\boxed{\mathbf{7}}$

- un des deux nombres premiers (l'autre est 5) qui apparaît le plus souvent comme 3$^e$ facteur premier d'un entier (1 fois sur 30);
- le 2$^e$ nombre premier de Mersenne: $7 = 2^3 - 1$.

[1]En 1936, S. Pillai [155] démontrait que si on écrit $3^k = q2^k + r$ avec $0 < r < 2^k$, alors $g(k) = 2^k + [(3/2)^k] - 2$ si $r + q \leq 2^k$.

$\boxed{8}$

- le $3^e$ nombre $n$ tel que $\tau(n) = \phi(n)$: les seuls nombres satisfaisant cette propriété sont 1, 3, 8, 10, 18, 24 et 30;
- le nombre de paires de nombres premiers jumeaux $< 100$ (voir le nombre 1224).

$\boxed{9}$

- le seul carré parfait qui soit précédé d'une puissance[2] de 2: $2^3 + 1 = 3^2$;
- le seul carré parfait ne pouvant pas s'écrire comme la somme des carrés de quatre nombres (Sierpinski [178], p. 405);
- le plus petit nombre $r$ qui a la propriété que chaque nombre peut s'écrire sous la forme $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_r^3$, où les $x_i$ sont des entiers non négatifs (voir le nombre 4).

$\boxed{10}$

- un des cinq nombres (les autres sont 1, 120, 1540 et 7140) qui sont à la fois triangulaires et tétraédraux (voir E.T. Avanesov [8]): un nombre $n$ est dit *tétraédral* s'il peut s'écrire sous la forme $n = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$: il correspond au nombre de sphères d'un même rayon qui peuvent être empilées dans un tétraèdre;
- le $4^e$ nombre $n$ tel que $\tau(n) = \phi(n)$ (voir le nombre 8).

$\boxed{11}$

- le plus petit nombre premier $p$ tel que $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$: le seul autre nombre premier $p < 2^{32}$ satisfaisant cette congruence est $p = 1\,006\,003$ (voir Ribenboim [162], p. 347)[3];
- le nombre $n$ qui fait passer la somme $\displaystyle\sum_{i \le n} \frac{1}{i}$ au-delà de 3 (voir le nombre 83).

---

[2] On sait maintenant davantage. En effet, selon la conjecture de Catalan (énoncée par Catalan [31] en 1844), *les seuls nombres consécutifs de la suite des puissances* $1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, \ldots$ *sont 8 et 9*; or, cette conjecture a récemment été démontrée par Preda Mihailescu.

[3] Tout comme pour les nombres premiers de Wieferich (voir le nombre 1093), on ne sait pas si cette suite de nombres est infinie.

$\boxed{\mathbf{12}}$

- le plus petit nombre pseudo-parfait: on dit qu'un nombre est *pseudo-parfait* s'il peut s'exprimer comme la somme de certains de ses diviseurs propres: ici $12 = 6 + 4 + 2$; en 1976, Erdős a démontré que l'ensemble des nombres pseudo-parfaits est de densité positive (voir R.K. Guy [97], B2);

- le plus petit nombre $m$ pour lequel l'équation $\sigma(x) = m$ possède exactement deux solutions, soit 6 et 11;

- le seul nombre $n > 1$ tel que $\sigma(\gamma(n)) = n$;

- le plus petit nombre sublime: on dit qu'un nombre $n$ est *sublime* si $\tau(n)$ et $\sigma(n)$ sont tous deux parfaits: ici $\tau(12) = 6$ et $\sigma(12) = 28$; il s'agit là d'une notion introduite par K. Ford; le seul autre nombre sublime connu est $2^{126}(2^{61}-1)(2^{31}-1)(2^{19}-1)(2^7-1)(2^5-1)(2^3-1)$.

$\boxed{\mathbf{13}}$

- le $2^e$ nombre premier de Wilson connu (voir le nombre 5);

- le nombre premier qui apparaît le plus souvent comme $4^e$ facteur premier d'un entier, soit 31 fois sur 5005 (voir le nombre 199);

- le plus petit nombre premier $p$ tel que $23^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$: les seuls nombres premiers $p < 2^{32}$ satisfaisant cette congruence sont 13, 2 481 757 et 13 703 077 (voir Ribenboim [162], p. 347);

- le $3^e$ nombre cheval: on dit que $n$ est un *nombre cheval* s'il représente le nombre de classements possibles, les égalités étant permises, dans une course à laquelle participent $k$ chevaux; ainsi, si $H_k$ est le $k$-ième nombre cheval, on peut démontrer[4] que

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} i^k \left( \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j \binom{j+i}{j} \right);$$

  les 20 premiers termes de la suite $(H_k)_{k\geq 1}$ sont 1, 3, 13, 75, 541, 4683, 47293, 545835, 7087261, 102247563, 1622632573, 28091567595, 526858348381, 10641342970443, 230283190977853, 5315654681981355, 130370767029135901, 3385534663256845323, 92801587319328411133 et 2677687796244384203115.

[4]Formule établie par Charles Cassidy (Université Laval).

$\boxed{\mathbf{14}}$

- la plus petite solution de[5] $\sigma(n) = \sigma(n+1)$; la suite des nombres satisfaisant cette propriété commence comme suit: 14, 206, 957, 1334, 1364, 1634, 2685, 2974, 4364, 14841, 18873, 19358, 20145, 24957, 33998, 36566, 42818, 56564, 64665, 74918, 79826, 79833, 84134, 92685, ...;
- le 4$^e$ nombre de Catalan: les nombres de Catalan[6] sont les nombres de la forme $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

$\boxed{\mathbf{15}}$

- la 3$^e$ plus petite solution de $\phi(n) = \phi(n+1)$; la suite des nombres satisfaisant cette propriété commence comme suit: 1, 3, 15, 104, 164, 194, 255, 495, 584, 975, 2204, 2625, 2834, 3255, 3705, 5186, 5187, 10604, 11715, 13365, 18315, 22935, 25545, 32864, 38804, 39524, 46215, 48704, 49215, 49335, 56864, 57584, 57645, 64004, 65535, 73124, ...: R. Baillie [10] a trouvé 391 solutions $n < 2 \cdot 10^8$ ;[7]
- un des trois nombres $n$ tels que le polynôme $x^5 - x \pm n$ peut se factoriser: les deux autres sont $n = 22\,440$ et $n = 2\,759\,640$: ici on a $x^5 - x \pm 15 = (x^2 \pm x + 3)(x^3 \mp x^2 - 2x \pm 5)$ (voir le nombre 22 440);
- la valeur de la somme des éléments d'une diagonale, d'une ligne ou d'une colonne d'un carré magique $3\times3$: pour un carré magique $k\times k$ avec $k \geq 3$, cette valeur commune est $k(k^2+1)/2$, ce qui donne lieu à la suite dont les premiers termes sont 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, 505, 671, 870, 1105, 1379, 1695, ... (voir Sierpinski [178], p. 434).

$\boxed{\mathbf{16}}$

- le seul nombre $n$ pour lequel il existe deux entiers distincts $a$ et $b$ tels que $n = a^b = b^a$: ici $a = 2$, $b = 4$;
- le plus petit carré parfait pour lequel il existe un autre carré parfait ayant même somme de diviseurs: $\sigma(16) = \sigma(25) = 31$.

[5] Cette suite de nombres est probablement infinie, mais on ne sait pas le démontrer.

[6] Les nombres de Catalan interviennent lorsqu'on veut savoir de combien de façons on peut partitionner un polygone convexe en triangles en formant certaines de ses diagonales.

[7] P. Erdős, C. Pomerance & A. Sárközy [76] donnent un argument empirique qui suggère que, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixe, l'équation $\phi(n) = \phi(n+1)$ admet au moins $x^{1-\varepsilon}$ solutions $n \leq x$. Toutefois selon A. Schinzel [173], il est possible que l'équation $\phi(n) = \phi(n+1)$ ne possède qu'un nombre fini de solutions, mais il conjecture que pour chaque entier pair $k \geq 2$, l'équation $\phi(n) = \phi(n+k)$ admet une infinité de solutions. Enfin ajoutons que l'équation $\phi(n) = \phi(n+k)$ admet très peu de solutions lorsque $k$ est impair et divisible par 3; ainsi en désignant par $E_k$ l'ensemble des solutions $n < 10^8$ de $\phi(n) = \phi(n+k)$, on a $E_3 = \{3,5\}$, $E_9 = \{9,15\}$, $E_{15} = \{13,15,17,21\}$, $E_{21} = \{21,35\}$ et $E_{27} = \{27,45,55\}$, alors que la cardinalité des autres ensembles $E_k$, $1 \leq k \leq 32$, est au moins de 12.

$\boxed{\mathbf{17}}$

- le $3^e$ nombre premier de Fermat ($17 = 2^{2^2} + 1$), les deux premiers étant 3 et 5: un nombre de la forme $2^{2^k} + 1$, où $k$ est un entier non négatif, est appelé un *nombre de Fermat* et est souvent désigné par $F_k$ (voir le nombre 70 525 124 609); si un tel nombre est premier, on dit qu'il s'agit d'un *nombre premier de Fermat*;

- le seul nombre premier qui soit la somme de quatre nombres premiers consécutifs: $17 = 2 + 3 + 5 + 7$;

- l'exposant du $6^e$ nombre premier de Mersenne $2^{17} - 1$ (Cataldi, 1588);

- le plus petit nombre de Stern (voir le nombre 137).

$\boxed{\mathbf{18}}$

- le plus grand nombre $x$ connu pour lequel il existe des nombres $n \geq 3$, $y$ et $q \geq 2$ tels que $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$; les seules solutions connues de cette dernière équation sont données par

$$\frac{3^5-1}{3-1} = 11^2, \qquad \frac{7^4-1}{7-1} = 20^2, \qquad \frac{18^3-1}{18-1} = 7^3$$

(voir Y. Bugeaud, M. Mignotte & Y. Roy [26]);

- le $5^e$ nombre $n$ tel que $\tau(n) = \phi(n)$ (voir le nombre 8).

$\boxed{\mathbf{19}}$

- le plus petit nombre $r$ qui a la propriété que chaque nombre peut s'écrire sous la forme $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_r^4$, où les $x_i$ sont des entiers non négatifs (voir le nombre 4);

- un des huit nombres connus $k$ tels que $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ est premier: les autres[8] sont 2, 23, 317, 1 031, 49 081, 86 453 et 109 297;

- le plus grand nombre premier $p_k$ connu tel que $\nu(p_k) := \displaystyle\prod_{p \leq p_k} \frac{p+1}{p-1}$ est un entier: ici $\nu(p_8) = \nu(19) = 21$;

- l'exposant du $7^e$ nombre premier de Mersenne $2^{19} - 1$ (Cataldi, 1588).

[8]Un tel nombre $k$ est nécessairement premier, car s'il ne l'était pas, alors $k = ab$ avec $1 < a \leq b < k$, auquel cas $\frac{10^{ab}-1}{9} = \frac{10^{ab}-1}{10^b-1} \cdot \frac{10^b-1}{9}$, le produit de deux entiers $> 1$.

$\boxed{\textbf{20}}$

- la plus petite solution $n$ de $\sigma(n) = \sigma(n+6)$; la suite des nombres satisfaisant cette propriété commence comme suit: 20, 155, 182, 184, 203, 264, 621, 650, 702, 852, 893, 944, 1343, 1357, 2024, 2544, 2990, 4130, 4183, 4450, 5428, 5835, 6149, 6313, 6572, 8177, 8695, ...

$\boxed{\textbf{21}}$

- le $2^e$ nombre pouvant s'écrire comme le produit de deux nombres premiers de Mersenne: ici $21 = 3 \cdot 7$;
- le plus petit entier supérieur à 1 dont la somme des diviseurs est une puissance cinquième: ici $\sigma(21) = 2^5$;
- le plus petit nombre 2-hyperparfait: on dit qu'un nombre $n$ est 2-*hyperparfait* s'il peut s'exprimer comme $n = 1 + 2 \sum_{\substack{d|n \\ 1<d<n}} d$, ce qui revient à la condition $2\sigma(n) = 3n+1$; la suite des nombres satisfaisant cette propriété commence comme suit: 21, 2 133, 19 521, 176 661, 129 127 041, ...; de manière plus générale, on dit qu'un entier positif $n$ est *hyperparfait* s'il existe un entier positif $k$ tel que

$$n = 1 + k \sum_{\substack{d|n \\ 1<d<n}} d, \tag{1}$$

auquel cas on dit aussi que $n$ est $k$-*hyperparfait*[9]; voici d'ailleurs un tableau de quelques nombres $k$-hyperparfaits avec leurs factorisations respectives:

[9]Un nombre 1-hyperparfait est tout simplement un nombre parfait. Il est facile de montrer que la relation (1) est équivalente à

$$k\sigma(n) = (k+1)n + (k-1). \tag{2}$$

Il est clair qu'une puissance de nombre premier $p^\alpha$, avec $\alpha \geq 1$, ne peut être hyperparfait. Il découle immédiatement de (1) que si $n$ est $k$-hyperparfait, alors $n \equiv 1 \pmod{k}$ et de plus que

$$\sigma(n) = n + 1 + \frac{n-1}{k}. \tag{3}$$

Cette dernière relation s'avère un excellent moyen de déterminer si un entier donné $n$ est un nombre hyperparfait ou encore de construire, par ordinateur, la liste croissante des nombres hyperparfaits. En effet, il découle de (3) que

$$n \text{ est un nombre hyperparfait} \iff \frac{n-1}{\sigma(n)-n-1} \text{ est un entier.}$$

Il découle également de (3) que le plus petit facteur premier de $n$ est supérieur à $k$. En effet, supposons que $p|n$ avec $p \leq k$. On aurait alors que $n/p$ est un diviseur propre de $n$, auquel cas

$$\sigma(n) > n + 1 + \frac{n}{p} \geq n + 1 + \frac{n}{k} > n + 1 + \frac{n-1}{k} = \sigma(n),$$

une contradiction. Il découle de ceci qu'un nombre hyperparfait qui n'est pas parfait est impair.

| | | |
|---|---|---|
| 2-hyperparfait | 21 | $= 3 \cdot 7$ |
| | 2 133 | $= 3^3 \cdot 79$ |
| | 19 521 | $= 3^4 \cdot 241$ |
| | 176 661 | $= 3^5 \cdot 727$ |
| | 129 127 041 | $= 3^8 \cdot 19\,681$ |
| | 328 256 967 373 616 371 221 | $= 3^{21} \cdot 31381059607$ |
| 3-hyperparfait | 325 | $= 5^2 \cdot 13$ |
| 4-hyperparfait | 1 950 625 | $= 5^4 \cdot 3\,121$ |
| | 1 220 640 625 | $= 5^6 \cdot 78\,121$ |
| | 186 264 514 898 681 640 625 | $= 5^{14} \cdot 30\,517\,578\,121$ |
| 6-hyperparfait | 301 | $= 7 \cdot 43$ |
| | 16 513 | $= 7^2 \cdot 337$ |
| | 60 110 701 | $= 7^2 \cdot 383 \cdot 3203$ |
| | 1 977 225 901 | $= 7^5 \cdot 117\,643$ |
| | 2 733 834 545 701 | $= 7^4 \cdot 30893 \cdot 36857$ |
| | 232 630 479 398 401 | $= 7^8 \cdot 40353601$ |
| 10-hyperparfait | 159 841 | $= 11^2 \cdot 1\,321$ |
| 11-hyperparfait | 10 693 | $= 17^2 \cdot 37$ |
| 12-hyperparfait | 697 | $= 17 \cdot 41$ |
| | 2 041 | $= 13 \cdot 157$ |
| | 1 570 153 | $= 13 \cdot 269 \cdot 449$ |
| | 62 722 153 | $= 13^3 \cdot 28\,549$ |
| | 10 604 156 641 | $= 13^4 \cdot 371\,281$ |
| | 13 544 168 521 | $= 13^2 \cdot 2347 \cdot 34147$ |
| | 1 792 155 938 521 | $= 13^5 \cdot 4\,826\,797$ |

- le nombre de nombres premiers de deux chiffres; si on désigne par $C(k)$ le nombre de nombre premiers de $k$ chiffres, alors $C(1) = 4$, $C(2) = 21$, $C(3) = 143$, $C(4) = 1061$, $C(5) = 8363$, $C(6) = 68\,906$, $C(7) = 586\,081$, $C(8) = 5\,096\,876$, $C(9) = 45\,086\,079$, $C(10) = 404\,204\,977$, $C(11) = 3\,663\,002\,302$ et $C(12) = 33\,489\,857\,205$.

---

Par ailleurs, si $n$ est un nombre $k$-hyperparfait et libre de carrés, alors $k$ est pair. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $k$ est impair. Comme on vient de voir, $n$ doit être impair, à moins que $k = 1$, auquel cas $n$ serait parfait et pair. Mais alors on aurait que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ pour un certain nombre premier $p \geq 3$, auquel cas $n$ ne serait pas libre de carrés. On a donc que $n$ est impair. Or d'après (2),

$$k\sigma(n) = 2\left(\frac{k+1}{2}n + \frac{k-1}{2}\right). \tag{4}$$

Si $k \equiv 1 \pmod 4$, alors il découle de (4) que

$$k\sigma(n) = 2\,(\text{impair} + \text{pair}) = 2 \times \text{impair},$$

tandis que si $k \equiv 3 \pmod 4$, alors

$$k\sigma(n) = 2\,(\text{pair} + \text{impair}) = 2 \times \text{impair},$$

ce qui signifie que $2 \| \sigma(n)$, auquel cas $n$ est premier, puisque $n$ est libre de carrés.