Chapitre I

Introduction

Pendant l'école primaire, les mathématiques se réduisent surtout au calcul. On apprend des méthodes (des algorithmes) pour calculer : addition, soustraction, multiplication et division. On apprend également à résoudre des problèmes simples mettant en jeu ces opérations. C'est surtout à partir du collège que les élèves commencent à voir un discours mathématique structuré, avec des énoncés formels justifiés par des raisonnements.

Cet enseignement des mathématiques est basé sur l'exemple : les élèves doivent apprendre à faire des mathématiques en imitant l'enseignant. Malheureusement, l'expérience montre que pour de nombreux élèves, cela n'est pas suffisant. Il faut parvenir à expliquer ce qu'est un texte mathématique ou une démonstration et être capable de les reconnaitre et les critiquer de manière constructive.

Le *discours mathématique* employé par les enseignants et les mathématiciens utilise une langue particulière que nous appellerons le *français mathématique*. Il mélange des notations symboliques et des mots de la langue française, parfois avec un sens subtilement différent de leur version usuelle ; et certaines expressions ont des formes spécifiques qu'il faut apprendre à décoder. Pour comprendre un texte mathématique, il faut résoudre des *anaphores*, combler des non-dits, etc. Le français mathématique ne devrait pas être ambigu et un lien clair est nécessaire entre le texte en français et sa sémantique.

On reproche souvent aux mathématiques d'être une discipline abstraite. C'est vrai si l'on considère un des sens du mot qui « exprime une qualité considérée indépendamment du sujet » (d'après le *Littré*) ; mais faux si l'adjectif « abstrait » est utilisé comme un synonyme de difficile.

Le but de ce livre, principalement destiné aux étudiants des premières années d'études scientifiques à l'université et en particulier aux futurs enseignants, est de consolider ce savoir propre aux mathématiques sans faire de la logique formelle. Nous y préciserons la structure et le sens des textes mathématiques. Nous y parlerons surtout de ce qu'est une démonstration et donnerons quelques éléments linguistiques qui peuvent bloquer les étudiants.

Les nombreux exemples ne demandent pas de pré-requis autres qu'une notion intuitive des objets manipulés : les nombres entiers, les droites du plan, etc. Les notions qui pourraient ne pas être connues et qui sont utilisées dans les exemples de démonstrations des chapitres IV et V seront définies avant leur utilisation.

Ce livre se démarque de la plupart des livres traditionnels de mathématiques car il ne vise pas un domaine particulier comme l'analyse ou l'arithmétique. Il se place à un niveau plus général : notre but est d'expliquer le langage et le raisonnement et quand nous nous intéressons aux objets mathématiques eux mêmes (chapitre VI), nous parlerons essentiellement de leur construction. Nous espérons qu'il permettra à ses lecteurs d'accéder à une autre vision des mathématiques, plus claire, plus facile et plus attrayante.

Nous, les quatre auteurs de ce livre, sommes des enseignants-chercheurs à l'université Savoie Mont Blanc à Chambéry, spécialistes de la branche de la logique appelée « théorie de la démonstration ». Au cours de nombreuses années de recherche et d'enseignement, nous avons progressivement adapté ces concepts logiques en un discours structuré destiné aux étudiants qui a abouti à cet ouvrage. Vous pouvez nous joindre par email à l'adresse suivante :

`dhnr@univ-smb.fr`

Vos questions, remarques, suggestions et critiques constructives concernant cet ouvrage sont les bienvenues.

I.1 – Les mathématiques

1 – Les objets mathématiques

Au lycée, la plupart des objets mathématiques manipulés ont une dimension intuitive et concrète : les nombres entiers, les réels, les points et les droites etc. C'est au premier cycle universitaire que les objets plus complexes et abstraits deviennent prépondérants : les fonctions, les ensembles, les espaces vectoriels etc. L'opposition abstrait / concret n'a pourtant pas lieu d'être.

- Le nombre 5 est un objet mathématique abstrait au sens intuitif évident : il représente le nombre des doigts de la main, des stylos dans mon pot à crayon ou de toute autre collection de même taille. Chacune de ces collections peut être constituée d'objets concrets ou abstraits. Cette notion de nombre est abstraite mais elle est facile à comprendre.
- Une droite en géométrie est abstraite. Un dessin permet de la visualiser, mais contrairement à sa représentation, une vraie droite du plan n'a pas d'épaisseur et est de longueur infinie (encore un concept abstrait).

Le mathématicien doit se faire une représentation mentale suffisamment précise de ces objets pour pouvoir développer des intuitions, réfléchir et raisonner. Cette représentation n'est jamais complète : par exemple, le nombre 5 possède des propriétés encore inconnues. Les représentations mentales de plusieurs mathématiciens doivent pourtant être compatibles entre elles sans quoi aucune communication ne serait possible.

Cette communication, en particulier avec les étudiants, est rendue difficile par le fait que le même objet peut être introduit de manières très différentes. Voici trois définitions courantes et équivalentes de la fonction sinus qui apparaissent au cours des études.

— Si on connait la notion d'angle, on peut utiliser le cercle trigonométrique ou plus généralement, le rapport de la longueur du côté opposé à l'angle sur la longueur de l'hypoténuse dans un triangle rectangle. Dans le second cas, il ne faut pas oublier de montrer que la valeur du sinus ne dépend pas du triangle choisi.

— Si on connait la notion de limite, on peut utiliser son développement en série : $\sin(x)$ est la limite de la suite

$$x - \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{x^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5} - \frac{x^7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} + \cdots$$

— On peut construire la fonction sinus de manière implicite comme la solution de l'équation différentielle $y'' = -y$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Cette construction ne permet pas de calculer directement les valeurs de la fonction sinus mais la spécifie entièrement.

Mais à partir de quoi définit-on les angles, les nombres, les limites de suite, ou les solutions d'une équation différentielle ? Quels sont les premiers objets mathématiques ? Les mathématiciens utilisent des axiomes qui affirment que certains objets primitifs existent et vérifient certaines propriétés. Ces *axiomes* doivent être suffisamment intuitifs pour ne pas être mis en doute.

— Lorsqu'on fait de l'arithmétique, on suppose l'existence d'une infinité d'entiers naturels $0, 1, 2, \ldots$ avec les opérations habituelles, addition, multiplication. On ne cherche pas à les construire à partir d'objets plus primitifs. Un des axiomes de l'arithmétique est, par exemple, que $x + 0 = x$. Un autre est le principe de récurrence.

— Lorsqu'on fait de la géométrie plane, les objets primitifs sont les points et les droites. Voici deux des axiomes :

(i) Par deux points différents, il passe une unique droite.

(ii) Si un point n'est pas sur une droite, alors il y a une unique droite passant par ce point qui ne rencontre pas la première (axiome des parallèles).

Il est important de noter que les axiomes ne définissent pas forcément l'univers mathématique de manière unique. On peut par exemple omettre l'axiome des parallèles pour obtenir une géométrie différente de la géométrie traditionnelle. Loin d'être déconnectées de la réalité, ces géométries ont des applications très concrètes : la surface de la terre par exemple n'est pas plane mais sphérique et l'axiome des parallèles n'y est pas vérifié.

Cette méthode dite *axiomatique* permet souvent d'éviter les cercles vicieux car elle oblige les mathématiciens à procéder par étapes : on commence par les axiomes et on ajoute des couches successives de plus en plus sophistiquées qui utilisent les objets construits précédemment. Mais cette méthode ne garantit pas que les axiomes sont cohérents. En effet, rien n'empêche de choisir deux axiomes qui se contredisent. L'univers mathématique correspondant n'a plus aucun intérêt car on peut alors prouver tout et son contraire ! Au début du XX^{e} siècle, des *paradoxes* (comme celui de Russel, page 15) sont apparus en mathématiques et ont contribué au développement de la logique moderne qui traite en particulier de la cohérence des axiomes utilisés que nous évoquerons au chapitre VI.

2 – Les propriétés des objets

Les mathématiciens s'intéressent aux propriétés des objets de l'univers mathématique ainsi construit. Des exemples de propriétés sont

- en arithmétique : la parité, l'ordre (plus petit / plus grand), le fait d'être premier, la divisibilité, etc.
- en géométrie : le parallélisme, la relation d'incidence (l'appartenance d'un point à une droite), l'alignement des points, l'orthogonalité de deux droites, etc.

Ces propriétés sont définies soit à partir de concepts plus simples, soit à partir des relations atomiques [1] introduites par les objets et les axiomes. Par exemple, en géométrie axiomatique la relation d'incidence est une propriété atomique alors que le parallélisme de deux droites (pas de point commun) et l'alignement de trois points (incidents à une même droite) sont définis à partir de la relation d'incidence.

Les questions mathématiques proviennent de l'étude de ces propriétés : y a-t-il une infinité de nombres premiers ? Est-ce que tout nombre est la somme de quatre carrés ? Quels sont les quadrilatères qui ont deux paires d'angles égaux ? Toutes les questions n'ont pas le même intérêt et certaines, comme la première, sont très importantes et ont des répercussions dans de nombreux domaines des mathématiques.

Les mathématiques ne sont pas figées : il est toujours possible de se poser de nouvelles questions. De nombreuses personnes voient les mathématiques comme un monde clos où tout ce qui est vrai est déjà connu et démontré. Rien n'est plus faux et il y a toujours des questions simples dont la réponse est inconnue.

Voici deux exemples de questions non résolues concernant les nombres premiers. Ces questions s'expriment simplement mais font partie des grands défis mathématiques actuels :

1. On utilise ce mot atomique au sens originel de ce terme : intuitivement « qui ne peut être décomposé en éléments plus primitifs ».

Les nombres premiers jumeaux.

Y a-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire des nombres premiers dont la différence est 2, comme 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, ... ?

La plus grande paire de nombres premiers jumeaux connus au moment de la rédaction de ce livre est $3756801695685^{2666669} \pm 1$, qui possèdent 200700 chiffres en écriture décimale.

La conjecture de Goldbach.

Tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est-il la somme de deux nombres premiers ? Par exemple, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11, \ldots$

On a vérifié par ordinateur que c'est bien le cas sur les nombres jusqu'à 4.10^{18}, mais rien n'exclut la possibilité de trouver un jour un nombre pair encore plus grand qui ne soit pas la somme de deux nombres premiers.

L'importance d'une question est difficile à mesurer. Ce sont parfois les développements nécessaires à sa réponse qui seront les plus importants. De nombreux mathématiciens ne s'intéressent pas directement aux applications concrètes de leurs théorèmes, même si ces applications sont parfois fondamentales dans notre société.

— Les nombres premiers n'avaient pas d'applications jusqu'à récemment et ils sont maintenant à la base de toute la cryptographie utilisée par les cartes à puces, les banques et les téléphones portables. Rien de ceci n'aurait la forme que l'on connait si les mathématiciens n'avaient pas développé la théorie des nombres depuis l'antiquité.

— La géométrie non euclidienne, où l'axiome des parallèles n'est pas vrai, a été étudiée par de nombreux mathématiciens bien au delà de ce qui est utile pour comprendre la géométrie de la sphère et faire des cartes. Et ce n'est qu'après avoir compris les notions de courbure dans un espace à trois dimensions qu'Einstein a pu poser les bases de la relativité générale. Personne ne peut savoir quel visage aurait la physique actuelle si les mathématiciens s'étaient limités à l'étude de la géométrie euclidienne.

Les conséquences d'autres questions non résolues pourraient être considérables dans de nombreux domaines. Par exemple, le problème « $P = NP$ » est non résolu et est considéré comme un des plus importants en mathématiques. Il s'agit de déterminer si ce que nous pouvons *vérifier* rapidement[2] peut être *trouvé* par un algorithme efficace. La plupart des mathématiciens pensent que « $P \neq NP$ ». L'impact de ce résultat, s'il est un jour démontré, sera très important : cela garantira que de nombreux types de calculs sont hors d'atteinte des ordinateurs, même les plus puissants. Ce problème fait partie de la liste des sept problèmes du millénaire, qui sont dotés d'un prix d'un million de dollars chacun et dont un seul, la conjecture de Poincaré, a été démontrée en 2003 par Grigori Perelman (1966–).

2. Le terme « rapidement » a, dans ce cadre, une définition précise et formelle.

I.2 – Les démonstrations mathématiques

Prouver, c'est établir la vérité d'un énoncé jusqu'à ce qu'aucun doute ne subsiste. Une démonstration est donc un texte mélangeant des phrases en français et des symboles mathématiques qui a pour but de convaincre de la vérité d'un énoncé. C'est une succession de raisonnements logiques qui utilisent des propriétés admises ou déjà établies pour parvenir à une conclusion que personne ne pourra contester.

1 – Exemples de démonstrations

Voici deux exemples classiques, écrits en français mathématique, dans deux domaines différents. Ils suivent des règles précises que nous détaillerons au chapitre III.

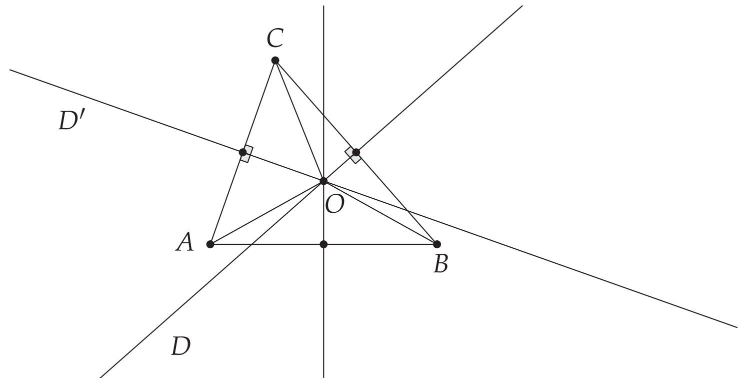
Proposition I.2.1
Il n'est pas possible d'écrire $\sqrt{2}$ comme un quotient de deux nombres entiers.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{2} = n/d$ où n et d sont deux entiers qui n'ont pas de diviseur commun. On peut faire cette hypothèse car il est toujours possible de simplifier une fraction jusqu'à ce que le numérateur et le dénominateur n'aient pas de diviseur commun. En particulier, ils ne sont pas pairs tous les deux. En mettant les deux membres de l'égalité au carré, on obtient $2 = n^2/d^2$ ce qui implique que $n^2 = 2d^2$. Le nombre n^2 est donc pair. Comme le carré d'un nombre impair est impair, n est forcément pair. L'entier n est donc de la forme $2m$ où m est un entier. On obtient $n^2 = 4m^2 = 2d^2$ et donc $2m^2 = d^2$. Le nombre d^2 est donc pair et comme précédemment d est pair également. On obtient une contradiction car, par hypothèse, n et d ne sont pas pairs tous les deux. On ne pouvait donc pas écrire $\sqrt{2}$ comme quotient de deux entiers. $\square$

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu. C'est aussi l'ensemble des points à égale distance de ses extrémités. Il est facile de démontrer que ces deux propriétés de la médiatrice sont équivalentes.

Proposition I.2.2
Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Démonstration. Soient ABC un triangle, D la médiatrice de $[BC]$ et D' la médiatrice de $[AC]$. Les droites D et D' sont concourantes car sinon, les deux droites (AC) et (BC) seraient distinctes et perpendiculaires à D, ce qui est impossible. Soit O leur point d'intersection. Par la propriété de la médiatrice, $|OB| = |OC|$ et $|OA| = |OC|$, donc $|OA| = |OB|$ et O est un point de la médiatrice de $[AB]$. Les trois médiatrices du triangle ABC sont donc concourantes en O.



□

Bien que les deux textes (avec le dessin dans la seconde démonstration) parlent d'objets mathématiques différents (nombres et constructions géométriques), nous verrons plus loin que les principes de raisonnement sont communs.

2 – Pourquoi faire des preuves ?

Cette question est légitime et la tendance actuelle, depuis l'école primaire jusqu'à la seconde année d'université, est de réduire la place de la recherche et rédaction de démonstrations dans l'enseignement des mathématiques. Le seul intérêt d'une preuve n'est pas de savoir qu'un énoncé est vrai. Si c'était le cas, il suffirait de conserver toutes les preuves faites par les mathématiciens dans une encyclopédie.

Exposer son raisonnement c'est apprendre à convaincre les autres. Le raisonnement mathématique s'affranchit du contexte : seul l'agencement des arguments compte. Cet argument est parfois mis en avant pour justifier une prédominance des mathématiques dans l'enseignement et l'évaluation y compris dans des domaines comme la médecine ou les formations commerciales.

Nous sommes persuadés que l'apprentissage des preuves est essentiel pour l'enseignement des mathématiques. Une démarche pédagogique souvent très efficace consiste à poser une conjecture, échouer à la démontrer, s'apercevoir qu'elle est fausse grâce à un contre-exemple, rebondir en corrigeant la conjecture et enfin la prouver pour mettre un point final à la question.

Dans l'enseignement actuel, les résultats sont justifiés par les enseignants mais la pratique des démonstrations par les étudiants tend à disparaitre. Les mathématiques du collège et du lycée consistent en grande partie en des calculs qui, même s'ils sont des démonstrations particulières, ne sont représentatifs en rien de la richesse des démonstrations. Par exemple, pour résoudre l'équation $5x - 3 = 2x + 6$ et trouver $x = 3$ comme solution, il faut appliquer une méthodologie précise que l'enseignant a justifiée. On peut transformer cette équation en $5x - 2x = 6 + 3$ puis $3x = 9$ puis $x = 3$. La démonstration qui permet de justifier ces transformations n'apparait pas dans ce calcul. Ce qui est demandé aux élèves, c'est de savoir appliquer correctement la méthode. Lorsque cette mécanique est acquise, ils peuvent alors passer directement de l'équation à sa solution sans détailler toutes les transformations. À ce niveau seuls certains élèves comprennent que les transformations, comme « ajouter la même quantité aux membres d'une égalité », sont en fait justifiées par les propriétés fondamentales de l'égalité.

Petit à petit, le niveau mathématique augmente et ce n'est plus l'application des règles de calcul qui est importante, mais leur choix et leur justification. Par exemple, les élèves de terminale, lorsqu'on leur indique qu'ils doivent faire une intégration par parties doivent pouvoir calculer l'intégrale

$$\int_1^2 \ln(x)/x^2 \mathrm{d}x.$$

Ce n'est que plus tard qu'ils devront trouver eux même la méthode. À mesure qu'ils avancent dans les études, ils vont devoir faire des démonstrations où la liste des règles à utiliser n'est pas précisée : plutôt qu'appliquer une méthode automatique, il faut inventer un raisonnement, nouveau à chaque fois.

Ce type de raisonnement « ouvert » où il est nécessaire d'inventer une nouvelle démonstration (sans se contenter d'appliquer des recettes) est pourtant présent dès l'école primaire. L'activité de calcul mental repose sur la recherche de raccourcis utilisant les propriétés des opérations arithmétiques (associativité de la multiplication ou distributivité de l'addition). Les élèves doivent pouvoir calculer 97×7 en constatant que ce calcul peut se faire de cette manière $97 \times 7 = (100 - 3) \times 7 = 100 \times 7 - 3 \times 7$, c'est-à-dire $700 - 21 = 679$.

Au collège, la géométrie est le dernier endroit où les élèves sont amenés à chercher et rédiger des démonstrations. Par exemple, pour montrer que deux droites sont parallèles, ils pourront montrer que des angles alternes-internes sont égaux ou que les deux droites sont parallèles à une même troisième ou encore qu'elles sont des côtés opposés d'un parallélogramme. Il s'agit effectivement de recherche de démonstrations.

Il en va de même à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques : pour apprendre les mathématiques, il faut faire des démonstrations. Ces démonstrations peuvent rester implicites et informelles (surtout pour les plus jeunes) mais elles sont nécessaires car elles contribuent à la structure de l'édifice mathématique en reliant les concepts. L'apprentissage sans structure est beaucoup plus difficile.

3 – Définition des démonstrations

Le *Larousse* définit une démonstration par : « Action de démontrer, de rendre évidente la vérité d'une loi scientifique, d'un raisonnement, d'une donnée objective ». Ceci n'est pas suffisant car on peut ne pas être convaincu par une preuve correcte et être convaincu par une preuve incorrecte. D'autre part, une telle définition dépend de celui qui la reçoit et ne permet pas d'expliquer les erreurs.