

---

# Table des matières

---

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| I      | Introduction  | 7   |
| I.1    | Les mathématiques . . . . .                         | 8   |
| I.2    | Les démonstrations mathématiques . . . . .          | 12  |
| I.3    | Cet ouvrage . . . . .                               | 17  |
| II     | Les objets des mathématiques                        | 19  |
| II.1   | Les expressions . . . . .                           | 20  |
| II.2   | Les formules . . . . .                              | 36  |
| II.3   | Les mathématiques sont typées . . . . .             | 52  |
| II.4   | Exercices . . . . .                                 | 55  |
| III    | Les démonstrations                                  | 63  |
| III.1  | Le raisonnement équationnel . . . . .               | 64  |
| III.2  | Le contexte et le but d'une démonstration . . . . . | 69  |
| III.3  | Les premières règles de démonstration . . . . .     | 75  |
| III.4  | Les connecteurs binaires . . . . .                  | 80  |
| III.5  | Les quantificateurs . . . . .                       | 89  |
| III.6  | La négation . . . . .                               | 98  |
| III.7  | Règles particulières . . . . .                      | 109 |
| III.8  | Les tables de vérité . . . . .                      | 115 |
| III.9  | Recherche et rédaction de preuves . . . . .         | 120 |
| III.10 | Exercices . . . . .                                 | 128 |
| IV     | Exemples de démonstrations                          | 139 |
| IV.1   | Ensembles et fonctions . . . . .                    | 140 |
| IV.2   | Analyse . . . . .                                   | 152 |
| IV.3   | Arithmétique . . . . .                              | 168 |
| IV.4   | Géométrie plane . . . . .                           | 175 |
| IV.5   | Exercices . . . . .                                 | 189 |

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| V    | D'autres démonstrations                       | 197 |
| V.1  | Arithmétique . . . . .                        | 197 |
| V.2  | Analyse . . . . .                             | 204 |
| V.3  | Ensembles et fonctions . . . . .              | 209 |
| V.4  | Géométrie . . . . .                           | 215 |
| V.5  | Exemples non-traditionnels . . . . .          | 225 |
| V.6  | Exercices . . . . .                           | 233 |
| VI   | Les fondements                                | 239 |
| VI.1 | Quotients et structures . . . . .             | 240 |
| VI.2 | Les nombres entiers . . . . .                 | 247 |
| VI.3 | Les nombres . . . . .                         | 251 |
| VI.4 | La géométrie axiomatique . . . . .            | 254 |
| VI.5 | Les ensembles . . . . .                       | 259 |
| VI.6 | Les phénomènes d'incomplétude . . . . .       | 262 |
| VI.7 | Exercices . . . . .                           | 264 |
| A    | Leçon de CAPES                                | 267 |
| A.1  | Le plan de la leçon . . . . .                 | 268 |
| A.2  | Développements et questions de jury . . . . . | 271 |
| B    | Corrigés des exercices                        | 273 |
| C    | Récapitulatif des règles                      | 351 |
| C.1  | Règles principales . . . . .                  | 351 |
| C.2  | Règles dérivées . . . . .                     | 356 |
|      | Index   | 359 |