SAVOIRS

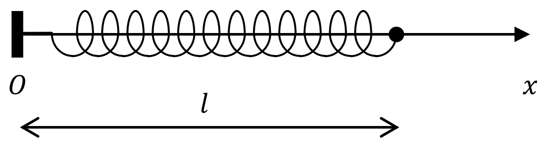
Thème 1 - Oscillateur harmonique

[S1.1] Force de rappel exercée par un ressort

La force de rappel exercée par un ressort est donnée par :

$$\vec{F} = -k(l - l_o)\vec{x}$$

où l représente la longueur totale du ressort, l_o représente la longueur à vide du ressort et k est la constante de raideur du ressort.
L'axe Ox est un axe horizontal qui correspond à l'axe du ressort dont $\vec{x}$ est le vecteur unitaire.



- ✓ La constante de raideur du ressort a pour unité $N.m^{-1}$.

[S1.2] Principe fondamental de la dynamique

C'est une relation que l'on reverra lors du cours de mécanique.

Pour l'instant, il suffit d'appliquer à la masse ponctuelle la relation suivante :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

avec $\vec{p} = m\vec{v}$ qui représente la quantité de mouvement de la masse ponctuelle et $\sum \vec{F}$ qui correspond à la somme de toutes les forces exercées sur la masse ponctuelle.

- ✓ Attention, il s'agit de vecteurs que l'on va projeter sur les axes.

[S1.3] Définition de l'oscillateur harmonique non amorti

Un oscillateur harmonique non amorti vérifie l'équation différentielle caractéristique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

où x est la variable, x_{eq} est une constante donnant la position d'équilibre du système et ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre à coefficients constants.

- ✓ La pulsation est l'inverse d'un temps et s'exprime en $rad.s^{-1}$.

La période est définie par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

La fréquence est définie par :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

✓ Pour le système masse-ressort la pulsation est donnée en fonction de la masse et de la raideur du ressort par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

[S1.4] Solution de l'équation sans second membre

L'équation différentielle sans second membre est de la forme suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

La solution peut s'écrire sous les formes suivantes qui sont équivalentes :

$$x(t) = A\ cos(\omega_0 t) + B\, sin(\omega_0 t)$$
$$x(t) = C\ cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$x(t) = D\ sin(\omega_0 t + \psi).$$

A, B, C, D, φ et ψ sont des constantes d'intégration qu'il faut déterminer à l'aide des conditions initiales.

✓ On obtient cette équation lorsque l'on travaille par rapport à la position d'équilibre du système, c'est-à-dire lorsque la variable est $x - x_{eq}$.
✓ C et D représentent l'amplitude du mouvement.
✓ φ représente la phase à l'origine des temps pour la description avec le cosinus.
✓ Il y a des relations entre les différentes constantes. On a notamment la relation suivante $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$. ψ représente aussi la phase à l'origine si l'on prend la description en sinus.

[S1.5] Solution de l'équation avec second membre

Il faut ajouter à la solution précédente la solution particulière de l'équation différentielle. On cherche la solution particulière constante et ici elle vaut $x = x_{eq}$.

D'où les trois solutions possibles :

$$x(t) = A\ cos(\omega_0 t) + B\, sin(\omega_0 t) + x_{eq}$$
$$x(t) = C\ cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{eq}$$
$$x(t) = D\ sin(\omega_0 t + \psi) + x_{eq}.$$

✓ Dans les exercices, on choisit une des trois solutions si l'énoncé n'impose rien (plutôt à l'oral).
✓ Par contre, on prend le modèle donné dans l'énoncé si ce dernier l'impose (plutôt à l'écrit).
✓ Déterminer les deux constantes d'intégration à l'aide des deux conditions initiales ($x(t=0)$ et $\dot{x}(t=0)$).

[S1.6] Les énergies potentielle, cinétique et mécanique

L'énergie cinétique est définie en fonction de la masse m et de la vitesse v par :

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2.$$

L'énergie potentielle élastique du ressort est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2.$$

L'énergie mécanique est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle soit :

$$E_m = E_c + E_p.$$

Pour un système conservatif comme l'oscillateur harmonique, l'énergie mécanique est conservée.

✓ C'est un moyen simple de contrôler ses calculs en s'assurant que l'énergie mécanique est bien constante et donc indépendante du temps.

Thème 2 - Propagation d’un signal

[S2.1] Signal

Un signal est une grandeur physique dont la connaissance permet d’accéder à une information. Le signal peut être un son (signal acoustique lié à une surpression), une onde électromagnétique (lumière, radio), un signal électrique (tension ou courant)...
Le signal peut subir des variations temporelles et spatiales.
Le signal est écrit, en fonction du point M et du temps t, sous la forme $s(M,t)$.

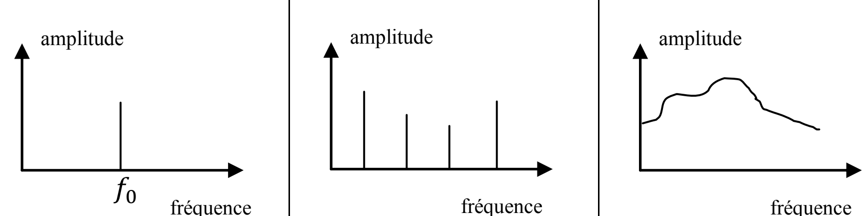
[S2.2] Spectre

Le signal physique, en un point M donné, peut être décomposé en une somme discrète ou continue de fonctions sinusoïdales que l’on peut mettre sous la forme suivante :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n).$$

On réalise l’analyse spectrale lorsque l’on décompose le signal en somme de fonctions sinusoïdales.
On réalise la synthèse lorsque l’on somme les différentes composantes sinusoïdales afin de reconstituer le signal.
Le signal peut être décrit de façon temporelle par la fonction $s(t)$ ou de façon fréquentielle par l’ensemble des valeurs amplitude, fréquence et phase (A_n, f_n, φ_n). Cet ensemble de valeurs s’appelle le spectre du signal.

✓ On représente souvent l’amplitude A_n en fonction de la fréquence f_n.
✓ On a un spectre continu pour une somme continue de sinusoïdes et un spectre discret pour une somme discrète.
✓ Si le signal est sinusoïdal, le spectre n’est constitué que d’une seule fréquence.



Signal sinusoïdal — Signal discret — Signal continu

[S2.3] Exemples de signaux

Un signal acoustique dans un milieu matériel est créé par une variation locale de la pression qui est accompagnée d'un déplacement local de matière. Les fréquences audibles sont comprises entre 20 et $20000 Hz$.

✓ Les signaux dont la fréquence est inférieure à $20Hz$ sont appelés infrasons.
✓ Les signaux dont la fréquence est supérieure à $20000Hz$ sont appelés ultrasons.

Un signal électromagnétique correspond à des variations du champ électromagnétique c'est-à-dire du champ électrique et magnétique. Les fréquences du visible sont de l'ordre de $5.10^{14}Hz$.

✓ Les ondes électromagnétiques sont de nature très variée et comprennent entre autres les ondes radio, la lumière, les rayons X et les rayons γ.
✓ Il n'y a pas besoin de milieu pour se propager contrairement aux signaux acoustiques. Les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide.

Un signal électrique correspond à la variation d'une grandeur électrique qui est le tension ou le courant.

✓ Les signaux ADSL sont des signaux électriques.
✓ La fréquence utilisée est souvent égale à $50Hz$ qui correspond à la fréquence du secteur.

[S2.4] Onde progressive

Une onde progressive se propageant selon les x croissants dans un milieu linéaire non dispersif s'écrit en fonction de la célérité c sous la forme :

$$s(x,t) = f(x - ct).$$

✓ L'onde se déplace sans se déformer (milieu non dispersif).
✓ L'onde se propage selon les x croissants car ce qui est arrivé en $x = 0$ à $t = 0$ se retrouve à l'instant t en $x = ct$.

Une onde progressive se propageant selon les x décroissants dans un milieu linéaire non dispersif s'écrit en fonction de la célérité c sous la forme :

$$s(x,t) = g(x + ct).$$

✓ L'onde se propage selon les x décroissants car ce qui est arrivé en $x = 0$ à $t = 0$ se retrouve à l'instant t en $x = -ct$.

Pour une onde progressive, les variables temps et espace sont couplées au sein d'une seule variable $u = x - ct$ ou $v = x + ct$ qui sont homogènes à une longueur. On peut aussi diviser ces variables par la célérité c afin d'obtenir des variables homogènes à un temps. On obtient pour l'onde progressive suivant les x croissants l'expression suivante :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

L'onde progressive suivant les x décroissants peut aussi s'écrire sous la forme :

$$s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

✓ On choisit une des deux descriptions et on la garde dans tout le problème. Ces deux descriptions sont équivalentes.

[S2.5] Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale est une onde progressive pour laquelle la fonction est une fonction sinusoïdale. L'onde progressive suivant les x croissants s'écrit en fonction de l'amplitude s_0, de la fréquence f et de la phase φ :

$$s(x,t) = s_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right).$$

Cette fonction possède une période temporelle T qui est égale à :

$$T = \frac{1}{f}.$$

Cette fonction possède aussi une période spatiale λ qui est égale à :

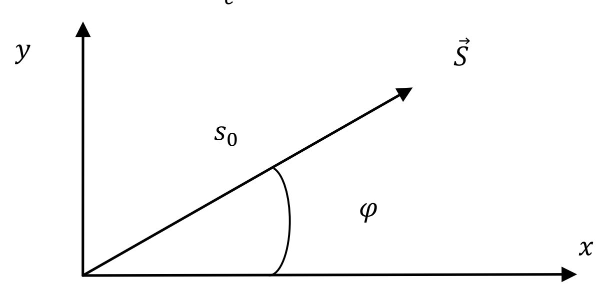
$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

✓ Les périodes spatiale et temporelle sont donc liées par la relation $\lambda = cT$. Cette relation est très importante.

[S2.6] Représentation de Fresnel

Un signal sinusoïdal de fréquence f peut être représenté par un vecteur de Fresnel $\vec{S}$ dans le plan tel que son amplitude est égale à l'amplitude du signal sinusoïdal et la phase φ correspond à l'angle entre l'axe Ox et le vecteur de Fresnel.

Le représentation de Fresnel du signal $s(x,t) = s_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$ est donnée à l'instant donné $t = \frac{x}{c}$ par :



[S2.7] Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence

Dans un milieu linéaire, la superposition de deux signaux est égale à la somme des deux signaux.

On dit que les signaux sont synchrones s'ils ont la même fréquence.
La superposition de deux signaux synchrones de même amplitude et provenant des sources S_1 et S_2 en un point M de l'espace est donnée par :

$$s(M,t) = s_o \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{S_1M}{c}\right) + \varphi_1\right) + s_o \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{S_2M}{c}\right) + \varphi_2\right).$$

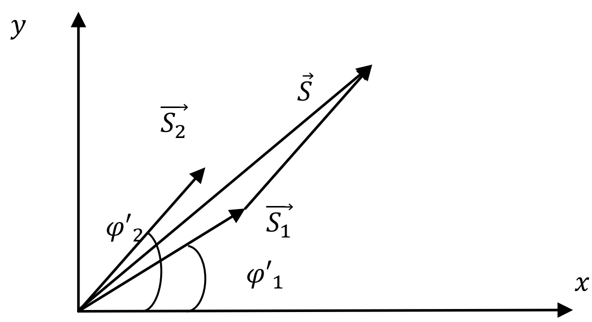
- ✓ L'onde se propage de la source vers le point M.

En transformant la somme en produit à l'aide des formules trigonométriques, on obtient un signal de même fréquence dont l'amplitude est variable en fonction du point M :

$s(M,t) = 2s_0 cos\left(2\pi f\left(t + \frac{(S_1M - S_2M)}{c}\right) + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi f}{c}(S_1M - S_2M) + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right).$

La représentation de Fresnel, à l'instant $t = 0$, donne directement la somme des deux signaux en posant :

$$\varphi'_1 = \varphi_1 - \frac{S_1M}{\lambda} \text{ et } \varphi'_2 = \varphi_2 - \frac{S_2M}{\lambda}.$$



- ✓ On peut en déduire le module et la phase.

On appelle δ la différence de marche et elle est égale à :

$$\delta = S_1M - S_2M.$$

On appelle $\Delta\varphi$ la différence de phase entre les deux ondes arrivant en M :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

On obtient des interférences constructives lorsque l'amplitude est maximale soit :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = cos\Delta\varphi = \pm 1.$$

$$\Delta\varphi = m\pi.$$

- ✓ m est un entier.

On obtient des interférences destructives lorsque l'amplitude est minimale donc nulle ici soit :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = cos\Delta\varphi = 0$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi.$$