Jour n^{o}1

Exercice 1.1

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ et l'application :

$$\phi : E \times E \to \mathbb{R},\ (M, N) \mapsto Tr(t(M)\, N),$$

où $Tr(M)$ désigne la trace de M et $t(M)$ désigne la transposée de M.

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

2) a) Soit le sous-ensemble de E :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

c) Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 1.2

Démontrer l'égalité :

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

Énoncé

Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ et l'application :

$$\phi : E \times E \to \mathbb{R},\ (M, N) \mapsto Tr(t(M)\,N),$$

où $Tr(M)$ désigne la trace de M et $t(M)$ désigne la transposée de M.

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

2) a) Soit le sous-ensemble de E :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$.

c) Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^{\perp}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice sur un produit scalaire un peu particulier qui fait intervenir trace et transposée de matrice mais c'est un produit scalaire qui revient très souvent dans les oraux. Ici, on vous simplifie les choses car $n = 2$ mais il faut avoir conscience que vous pourriez avoir à traiter le cas général dans un autre sujet d'oral. Plus précisement, il s'agit dans cette planche de commencer par vérifier qu'on a bien affaire à un produit scalaire puis on étudie l'orthogonalité et plus particulièrement les projections orthogonales pour un tel produit scalaire. Ici attention, les vecteurs sont des matrices ce qui peut dérouter le novice.

1) Pour montrer que ϕ est un produit scalaire, il faudra bien entendu montrer tous les points de la définition. Comme $n = 2$, on peut expliciter directement $\phi(M, N)$ en fonction des coefficients de M et de N (c'est de toute façon utile pour montrer que ϕ est une forme définie positive) mais pour montrer que ϕ est bilinéaire symétrique, on peut utiliser des résultats sur la trace et la transposée de matrices (ce qui plaira à l'examinateur). Rappelons pour cela au passage quelques résultats utiles du genre :

$$\forall (M, N) \in (M(\mathbb{R}))^2,\ Tr(MN) = Tr(NM) \text{ et } t(MN) = t(N)t(M).$$

Dans le corrigé, nous développerons d'ailleurs cette voie.

> Rapport du jury 2009
>
> La liste complète des propriétés définissant la notion de produit scalaire est parfois difficile à obtenir.

$\hookrightarrow$ Bien énumérer devant l'examinateur toutes les propositions qui font de ϕ un produit scalaire.

2) a) La seconde question ne pose aucune difficulté. Il y a deux méthodes : l'une, c'est la caractérisation d'un sous-espace vectoriel et l'autre, c'est ici d'expliciter deux matrices qui engendrent F.

$\hookrightarrow$ Si on applique la première méthode, ne pas oublier de commencer par vérifier que F est non vide ! Le principal conseil à donner, c'est de faire cette question avec soin ! Il faut gagner des points. Ce n'est pas parce que c'est facile qu'il faut oublier d'être rigoureux et précis.

b) Ici c'est plus délicat, on peut partir de la définition de l'orthogonal d'un sous-espace et utiliser une base de F. Attention, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt n'est pas nécessairement obligatoire mais si vous l'utilisez, sachez la maîtriser.

> Rapport du jury 2010
>
> Nous rappelons cependant que les candidats sont interrogés sur l'ensemble du programme. Nous avons pu remarquer que certains points sont parfois mal maîtrisés, et par exemple, on peut citer l'utilisation de la méthode de Schmidt.

c) On écrit que pour toute matrice M, sa projection orthogonale sur $F^{\perp}$ est donnée par :

$$p(M) = \phi(M, A_1)A_1 + \phi(M, A_2)A_2,$$

où $\{A_1,\, A_2\}$ est une base orthonormale de $F^{\perp}$.

$\hookrightarrow$ Le lien entre les questions est souvent une aide, comme on a déterminé juste avant une base orthonormale de $F^{\perp}$, on se dit que cela doit servir et on pense alors à la formule que l'on vient de rappeler.

Corrigé

1) Ici $n = 2$ mais laissons n entier quelconque non nul dans le développement de la première question pour rendre l'exercice un peu plus général. Nous devons établir que ϕ est un produit scalaire c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique dont la forme quadratique associée Φ est définie positive. On peut expliciter directement $\phi(M, N)$ en fonction des coefficients de M et de N mais nous ne le ferons volontairement qu'à l'étape γ).

α) Symétrie

Pour tout couple de matrices (M, N) carrées d'ordre n, $\phi(M, N)$

$$\begin{aligned}
&= Tr[t(M)N]\\
&= Tr[Nt(M)] \text{ car } Tr(AB) = Tr(BA),\ \forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2\\
&= Tr[t(Nt(M))] \text{ car } Tr(t(A)) = Tr(A),\ \forall A \in M_n(\mathbb{R})\\
&= Tr[Mt(N)] \text{ car } t(AB) = t(B)t(A),\ \forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2\\
&= Tr[t(N)M] \text{ car } Tr(AB) = Tr(BA),\ \forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2\\
&= \phi(N, M).
\end{aligned}$$

β) Linéarité

$\forall (M, N, P) \in (M_n(\mathbb{R}))^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\phi(\alpha M + P, N)$

$$\begin{aligned}
&= Tr[t(\alpha M + P)N]\\
&= \alpha Tr[t(M)N] + Tr(t(P)N) \text{ car } Tr(\alpha A + B) = \alpha Tr(A) + Tr(B)\\
&= \alpha\phi(M, N) + \phi(P, N).
\end{aligned}$$

L'égalité :

$$\phi(M, \alpha P + N) = \alpha\phi(M, P) + \phi(M, N)$$

découle de la symétrie et de la première linéarité qu'on vient de démontrer.

γ) *Forme quadratique définie positive*

Ici les propriétés de la trace et de la transposée ne suffisent plus pour s'en sortir. Nous posons $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux matrices carrées d'ordre n alors la matrice $t(M)N = (\alpha_{i,j})$ avec :

$$\forall (i,j) \in (\{1,...,n\})^2,\ \alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} n_{k,j}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \alpha_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} n_{j,i}$$

et finalement :

$$\phi(M,N) = Tr[t(M)N] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{j,i} n_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} n_{i,j}.$$

Il reste à faire $M = N$ et :

$$\Psi(M) = \phi(M,M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2.$$

Nous en déduisons que $\Psi(M) \geq 0$ et donc Ψ est une forme positive puis :

$$\Psi(M) = 0 \Leftrightarrow \left[m_{i,j}^2 = 0,\ \forall (i,j) \in (\{1,...,n\})^2\right]$$

c'est-à-dire :

$$\Psi(M) = 0 \Leftrightarrow \left[m_{i,j} = 0,\ \forall (i,j) \in (\{1,...,n\})^2\right] \Leftrightarrow M = O_{n,n},$$

où $O_{n,n}$ est la matrice nulle carrée d'ordre n. Finalement :

$$\boxed{\phi \text{ est bien un produit scalaire sur } M_n(\mathbb{R}).}$$

2) a) Nous commençons par la première méthode.

Première étape

F (qui est évidemment inclus dans E) est non vide car par exemple la matrice nulle est dans F (prendre $a = b = 0$).

Deuxième étape

Soit un réel λ et deux matrices M et M' de F. Il existe alors $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}.$$

Il reste à expliciter :

$$\lambda M + M' = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ -\lambda b - b' & \lambda a + a' \end{pmatrix}$$

et cette dernière matrice est bien dans F.

Attaquons la deuxième méthode. Si l'on pose :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

il est clair que F est l'ensemble des combinaisons linéaires de I_2 et de B.

En conclusion des deux méthodes,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R}).}$$

b) L'orthogonal $F^\perp$ est défini par :

$$F^\perp = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } \phi(M, N) = 0 \text{ pour toute matrice } N \in F\}.$$

Étant dans le cas $n = 2$, on peut poser :

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

mais il serait maladroit de poser $N = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ car on sait que M est dans $F^\perp$ si et seulement si elle est orthogonale à tous les vecteurs d'une base de F. Donc ici la matrice M est dans $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal à la fois à I_2 et à B (de la question précédente). Cela équivaut aux deux égalités à la fois :

$$Tr(t(M)I_2) = 0 \text{ et } Tr(t(M)B) = 0$$

c'est-à-dire :

$$x + t = 0 \text{ et } y - z = 0$$

et il reste l'ensemble des matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix},$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il est évident qu'une base de $F^\perp$ est constitué des deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si A et C sont orthogonales, ce serait formidable !
En tout cas, il faut y penser, histoire de montrer son esprit d'initiative !
On écrit alors :

$$\phi(A, C) = Tr(t(A)C) = Tr(AC) = 0.$$

L'intuition était bonne. Il reste enfin à diviser nos deux vecteurs par leurs normes pour avoir une base orthonormale car notre base n'est qu'orthogonale pour l'instant. On calcule :

$$\|A\| = \sqrt{\phi(A, A)} = \sqrt{2} \text{ et } \|C\| = \sqrt{\phi(C, C)} = \sqrt{2}$$

et donc :

$$\boxed{\text{une base orthonormale de } F^\perp \text{ est } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.}$$

c) On écrit que pour toute matrice M, sa projection orthogonale sur $F^\perp$ est donnée par :

$$p(M) = \phi(M, A_1)A_1 + \phi(M, A_2)A_2,$$

où $\{A_1,\ A_2\}$ est une base orthonormale de $F^\perp$. Ici, on prend (car ce serait idiot de choisir autre chose) :

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on applique la formule pour $M = J$, cela donne :

$$p(J) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{p(J) = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que pour démontrer que ϕ est un produit scalaire, il faut commencer par la symétrie ce qui donne la moitié du travail de fait pour la linéarité. Mais ceci n'est pas un prétexte pour oublier quelque chose. Il faut développer avec soin ses calculs sur sa feuille pour ne pas laisser une zone d'ombre quand on passe au tableau (car cet exercice est celui où l'on a une préparation sur feuille).

> Rapport du jury 2004
>
> On pourrait au moins espérer qu'une certaine habilité technique soit à même de compenser partiellement le déficit de connaissances des candidats. Ce n'est en général pas le cas comme en témoignent les brouillons quasiment vides laissés par les candidats à la fin de leur préparation, comme si, se rendant compte que leurs recettes, bien que théoriquement opérationnelles, les conduiraient à des calculs si fastidieux qu'ils préfèrent les abandonner avant même de les avoir initiés.

♡ Il faut se souvenir que pour trouver les vecteurs de $F^\perp$, il faut et il suffit de trouver les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs d'une base de F.

♡ Il faut se souvenir que parfois on n'a pas la chance de tomber directement sur une famille orthogonale quand on la demande et qu'il faut alors utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Ainsi par exemple dans le cas et les notations de l'exercice, si A et C n'avaient pas été orthogonales, il fallait chercher une matrice de la forme :

$$D = C + \lambda A,$$

où λ est à déterminer en imposant l'égalité :

$$\phi(C + \lambda A, C) = 0$$

Il restait enfin à diviser A et D par leurs normes et on aboutit au résultat voulu.

Formulaire

• Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on rappelle qu'une application ϕ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire si et seulement si l'on a les quatre assertions :

(i) ϕ est symétrique, c'est-à-dire que pour tout $(u,v) \in E^2$,

$$\phi(u,v) = \phi(v,u)\,;$$

(ii) ϕ est bilinéaire, c'est-à-dire que pour tout $(u,v,w) \in E^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\phi(u+\lambda v, w) = \phi(u,w) + \lambda\phi(v,w) \text{ et } \phi(u, \lambda v + w) = \lambda\phi(u,v) + \phi(u,w)\,;$$

(iii) ϕ est définie, c'est-à-dire que pour tout $u \in E$,

$$\phi(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0\,;$$

(iv) ϕ est positive, c'est-à-dire que pour tout $u \in E$,

$$\phi(u,u) \geq 0.$$

On dit alors que ϕ est une forme bilinéaire définie positive.

• Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, le sous-ensemble F de E en est un sous-espace vectoriel si et seulement si F est non vide et si pour tout $(u,v) \in F^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $u + \lambda v$ appartient à F.

• Si F est un sous-espace vectoriel de E, espace vectoriel euclidien ou préhilbertien associé au produit scalaire $<\,,\,>$, l'orthogonal de F, que l'on note $F^\perp$, est l'ensemble des vecteurs u de E tels que pour tout $v \in F$, on ait :

$$< u, v >= 0.$$

On montre que cet ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, si on connaît une base $\{v_1, ..., v_l\}$ de F, un vecteur u appartient à $F^\perp$ si et seulement si l'on a les égalités, pour tout i entier de 1 à l :

$$< u, v_i >= 0.$$

• Soit $\{w_1, ..., w_p\}$ une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel F de E espace euclidien ou un espace préhilbertien muni du produit scalaire $<\,,\,>$ alors la projection orthogonale d'un vecteur u de E sur F est donnée par :

$$p(u) =< w_1, u > w_1 + ...+ < w_p, u > w_p.$$

Énoncé

Démontrer l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici de démontrer une égalité. Ce genre d'exercice n'est pas si facile que cela si l'on n'a pas trop réfléchi (c'est l'exercice posé sans préparation).
La difficulté de l'exercice vient bien entendu du fait qu'il n'est pas compartimenté en questions.
Une première (mauvaise) idée serait de tenter le calcul des deux intégrales ce qui ne débouche ici sur rien de concret.
Une deuxième idée serait d'appliquer un théorème d'interversion de limite et d'intégrale mais le facteur n nous gêne. Pour le neutraliser, on doit penser à un changement de variable que va subir la première intégrale. Or, les bornes ne dépendent pas de n et c'est mieux que ça le reste ! L'idée est donc de faire un changement de variable qui laisse les bornes inchangées. À partir de là, essayons d'être plus directif. Posons :

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx.$$

Il s'agit de montrer que nI_n tend vers une intégrale finie (indépendante de n ce qui donne matière à définir une direction).
L'idée, après notre changement de variable, sera de penser au théorème de convergence dominée.

$\hookrightarrow$ Il faudra bien vérifier toutes les hypothèses du théorème utilisé. Il faudra aussi se rappeler que ce qui est testé ici en premier est l'esprit d'initiative du candidat !

Corrigé

Première étape

Nous allons poser pour tout n entier non nul :

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx.$$

Le changement de variable intéressant (et au final, on a vite fait le tour des changements de variable pertinents), c'est de poser $t = x^n$. On écrit :

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}\,dt = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{\frac{1}{n}}\,dt.$$

Il reste :

$$nI_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{\frac{1}{n}}\,dt.$$