AVANT-PROPOS

L'objet de ce livre est de préparer les futurs candidats à passer un type particulier de concours : **ceux dont les épreuves sont sous forme de questionnements automatisables**. Il s'agit dans cet ouvrage des concours de **l'ENAC (Ecole nationale de l'Aviation civile à Toulouse)**. Cette école possède cinq concours d'entrée qui ont un écrit avec des épreuves de Mathématiques sous forme de Q.C.M, et deux de ces concours ont deux épreuves de Mathématiques, une épreuve commune obligatoire et une épreuve dite facultative ou optionnelle.

1) Le premier concours est du niveau BAC et il permet de préparer la licence européenne civile de pilotage, appelée ATPL. Trois sujets corrigés (session 2014-2015-2016) en Mathématiques au **concours d'entrée au cycle préparatoire ATPL** sont proposés dans ce livre.

2) Le second concours est encore du niveau BAC qui permet d'être Technicien Supérieur de l'Aviation (civils et fonctionnaires). Il est appelé **concours TSA**. Six sujets corrigés (session 2014-2015-2016) en Mathématiques au **concours d'entrée à la formation TSA** sont proposés dans ce livre, trois sujets pour l'épreuve obligatoire et trois sujets pour l'épreuve optionnelle.

3) Le troisième concours est du niveau BAC+1, plus exactement au niveau de la première année des classes préparatoires aux Grandes Ecoles (filière MPSI), il permet d'être élève pilote dans l'Aviation civile et est appelé plus simplement **concours EPL**. Quatre sujets corrigés (session 2013-2014-2015-2016) au concours EPL en Mathématiques sont proposés dans ce livre.

4) Le quatrième concours est du niveau BAC+2, il permet d'être Ingénieur électricien des Systèmes de la Sécurité Aérienne et est appelé **concours IESSA**. Il est ouvert aux candidats titulaires d'un BTS, DUT ou d'une justification de seconde année de classe préparatoire aux Grandes Ecoles. Trois sujets corrigés (session 2014-2015-2016) au **concours IESSA** en Mathématiques sont proposés dans ce livre.

5) Le cinquième concours est du niveau deuxième année des classes préparatoires aux Grandes Ecoles. Il permet d'être ingénieur du contrôle de la navigation aérienne et est appelé **concours ICNA**. Six sujets corrigés (session 2014-2015-2016) en Mathématiques au **concours d'entrée à la formation ICNA** sont proposés dans ce livre, trois sujets pour l'épreuve obligatoire (filière PC) et trois sujets pour l'épreuve optionnelle (filière MP).

La plupart de ces épreuves sont compartimentées par parties qui sont indépendantes, voire par questions indépendantes. Cela permet à un futur candidat de se tester sans attendre d'avoir toutes les notions requises pour faire un sujet complet.

Tout élève qui désire passer le concours ATPL ou le concours TSA ou même préparer le BAC, pourra s'intéresser aux neuf sujets corrigés consacrés à ces deux concours proposés dans ce livre.

Tout élève de première année de classe préparatoire ou tout étudiant de première année d'Université pourra s'intéresser aux quatre sujets corrigés du concours EPL proposés. Pas seulement pour passer ce concours mais aussi pour tester son niveau. Bien souvent, il y a maintenant un concours blanc en fin de première année et faire ces QCM pour s'entraîner est un bon moyen de savoir là où on en est. On conseille même de faire aussi les sujets corrigés ATPL et TSA pour s'échauffer.

Tout élève de deuxième année de classe préparatoire ou tout élève de seconde année de l'Université, en particulier celui qui sera inscrit à la filière prépa-concours, pourra s'intéresser aux six sujets corrigés du concours ICNA, ainsi que bien entendu aux quatre sujets corrigés EPL puisque le programme de première année est inclus dans celui de deuxième année. Sachez aussi que la grosse majorité des questions des sujets optionnels de l'ICNA sont construits sur l'intersection commune aux deux programmes PC et MP.

Enfin, les trois sujets corrigés de l'IESSA proposés sont sur le programme du DUT de génie électrique et informatique industrielle mais sont faisables en partie par la plupart des étudiants de deuxième année. Dans ces sujets, par exemple, on met l'accent sur les séries de Fourier qui sont au programme en classe préparatoire TSI2 ou en licence 2 par exemple. Les candidats du concours IESSA pourront aussi avec profit aborder les sujets niveau BAC pour se chauffer.

Les corrigés sont développés au maximum. Il ne s'agit pas seulement de repérer les assertions vraies mais aussi de comprendre le pourquoi des assertions fausses. C'est souvent très formateur. De temps en temps des remarques ou des rappels de cours permettent d'illustrer le développement du corrigé.

En tout cas, il reste à vous souhaiter une bonne réussite aux concours ou à vos examens et en espérant que cet ouvrage pourra vous y aider en ce qui concerne les Mathématiques.

Sachez, pour ceux qui préparent EPL ou ICNA, et qui en veulent toujours plus, que les Editions Ellipses ont édité du même auteur (Walter Damin) les corrigés des sujets posés entre 2004 et 2006 :
(Nom de l'ouvrage : Questionnements automatisables de Mathématiques aux concours ENAC.)
Et aussi les corrigés des sujets posés entre 2007 et 2010 :
(Nom de l'ouvrage : Problèmes corrigés de Mathématiques posés aux concours ENAC. Tome 4.)

L'auteur accueillera avec reconnaissance les critiques et suggestions que le lecteur voudra bien lui faire parvenir, aux bons soins des Éditions Ellipses.

CONCOURS DE RECRUTEMENT A LA SÉLECTION DU CYCLE PRÉPARATOIRE ATPL
Test scientifique
SESSION 2014

Questions liées : *Questions 1 à 5, questions 6 à 9, questions 10 à 12, questions 13 à 17, questions 18 à 20.*

ENONCE

PARTIE I

On considère les intégrales suivantes :

$$K = \int_3^4 \frac{1}{x^2-4}\,dx \textbf{ et } L = \int_3^4 \frac{x}{x^2-4}\,dx.$$

Question 01 : La quantité $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ vaut

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$. **b)** $\dfrac{1}{x-2}$. **c)** $\dfrac{1}{x+2}$. **d)** $\dfrac{x}{x^2-4} - \dfrac{-2}{x^2-4}$.

Question 02 : Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$ sur $]2, +\infty[$ est F :

a) $-\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$. **b)** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-4)$. **c)** $\dfrac{1}{2}x^2\ln(x^2-4)$. **d)** $\ln(x) - \dfrac{x^2}{8}$.

Question 03 : L'intégrale $L = \displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-4}\,dx$ vaut

a) $\dfrac{1}{2}(\ln(12) - \ln(5))$. **b)** $\ln\left(2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$. **c)** $\dfrac{1}{2}\ln(7)$. **d)** $\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

Question 04 : Soit $I = L - 2K$. Alors I vaut :

a) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x+2}\,dx$. **b)** $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx$. **c)** $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$. **d)** $\ln(2)$.

Question 05 : L'intégrale $K = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}\,dx$ est égale à :

a) $\dfrac{I-L}{2}$. **b)** $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$. **c)** $-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{12}{5}\right)$. **d)** $\dfrac{1}{2}\ln(2)$.

PARTIE II

Trigonométrie

Question 06 : On a pour tout réel a et pour tout réel b :

a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. **b)** $\cos(a+b) = \cos a + \cos b$.

c) $\cos(2a) = 2\cos(a)$. **d)** $\cos(2a) = 1 - 2\,\sin^2 a$.

Question 07 : On a

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\,\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$. **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

c) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. **d)** $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Question 08 : On a

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. **d)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

Question 09 : On a

a) $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}$. **b)** $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}$.

c) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. **d)** $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

PARTIE III

Soit i ***le nombre complexe*** i ***tel que*** $i^2 = -1$ ***et*** z ***le nombre complexe défini par*** $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Question 10 : Le module de z est égal à

a) $|z| = 3 + \sqrt{3}$. **b)** $|z| = 2\sqrt{3}$.

Un argument de z est égal à

c) $\mathcal{A}rg\ (z) = \frac{\pi}{3}$. **d)** $\mathcal{A}rg\ (z) = \frac{\pi}{6}$.

Question 11 : L'écriture exponentielle de z est

a) $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$. **b)** $z = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}}$.

c) $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$. **d)** $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Question 12 : On peut écrire $z_1 = z^4$ sous la forme :

a) $144\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. **b)** $2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{6}}$.

c) $-72 + 72i\sqrt{3}$. **d)** $z = 144\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

PARTIE IV

On considère la fonction f ***définie par*** $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

Question 13 : L'ensemble des solutions réelles de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ est :

a) $S = \{4, 6\}$. **b)** $S = \{-2, -3\}$. **c)** $S = \{2, 3\}$.

d) $S = \emptyset$ car le discriminant est négatif.

Question 14 : La fonction f est définie sur l'ensemble

a) $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$. **b)** $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

La fonction f peut s'écrire

c) $x \mapsto x - 4 - \dfrac{2}{x - 1}$. **d)** $x \mapsto x - 4 + \dfrac{2}{x - 1}$.

Question 15 : La dérivée de f est égale à

a) $x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$. **b)** $x \mapsto \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(x - 1)^2}$.

La dérivée de f s'annule pour

c) $x = 1$. **d)** $x = 1 - \sqrt{2}$.

Question 16 : La fonction f est

a) décroissante sur $]-\infty, 1 - \sqrt{2}]$. **b)** croissante sur $]-\infty, 1 - \sqrt{2}]$.

c) décroissante sur $[1 - \sqrt{2}, 1[$. **d)** croissante sur $[1 - \sqrt{2}, 1[$.

Question 17 : On a

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **b)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$. **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

d) $f(1 - \sqrt{2}) = -3 - 2\sqrt{2}$.

PARTIE V

On considère les suites (u_n) ***et*** (v_n) ***définies par :***

$$\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases} \quad \textbf{\textit{et}}\ v_n = u_n + 3.$$

Question 18 : On a

a) $u_1 = -\dfrac{7}{3}$. **b)** $v_1 = -1$. **c)** $v_2 = -\dfrac{2}{3}$. **d)** $v_2 = \dfrac{2}{3}v_1$.

Question 19 :

a) La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

b) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. **d)** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Question 20 : On a

a) pour tout n entier, $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

La quantité $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$ vaut

b) $3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\right)$. **c)** $3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6\right)$. **d)** $6\left(\frac{2}{3}\right)^6$.

CORRIGE

Question 01 : On suppose que x^2-4 est non nul donc $x \neq \pm 2$ pour avoir l'existence de la quantité $\dfrac{x-2}{x^2-4}$. Par ailleurs, $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ et donc :

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$$

Attention, ces égalités ne sont valables que pour $x \neq \pm 2$ bien que la dernière quantité existe pour $x = 2$. On écrira quand même que **l'assertion c) est vraie** et que **l'assertion b) est fausse**. Quant à l'assertion a), on constate rapidement que $1/x - 1/2$ ne peut pas être égal à $(x-2)/(x^2-4)$. De toute façon, l'écriture $1/x$ oblige à supposer en plus $x \neq 0$. **L'assertion a) est fausse**. Enfin,

$$\frac{x}{x^2-4} - \frac{-2}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2-4} \neq \frac{x-2}{x^2-4}.$$

Et donc **l'assertion d) est fausse**.

Question 02 : Soit $x \in]2, +\infty[$. Notons F une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$.

On rappelle que F est une primitive de f si et seulement si F est dérivable et pour tout x dans le domaine de définition de F, $F'(x) = f(x)$.

On remarque que $(x^2-4)' = 2x$ et donc comme une primitive de $x \mapsto u'(x)/u(x)$ est $x \mapsto \ln|u(x)|$, pour tout x tel que $u(x) \neq 0$, alors en posant $u(x) = x^2-4$, on a (à une constante K près) :

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| = \frac{1}{2}\ln(x^2-4).$$

On peut enlever la valeur absolue car $x > 2$. On peut conclure que **l'assertion b) est vraie** et que **les assertions a), c) et d) sont fausses**.

Remarque : la quantité proposée dans l'assertion a) ressemble plutôt à la dérivée de f. L'examiner.

Celui qui ne sait pas ou n'aime pas intégrer pouvait dériver chaque expression proposée et comparer le résultat à $f(x)$.

Question 03 : On désire calculer l'intégrale $L = \displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-4}\,dx$. On sait que si F est une primitive de f sur $[2, +\infty[$, pour tout a et tout b contenus dans $[2, +\infty[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Donc ici $L = \displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-4}\,dx$ vaut :

$$F(4) - F(3) = \frac{1}{2}\ln(4^2-4) - \frac{1}{2}\ln(3^2-4) = \frac{1}{2}\left(\ln(12) - \ln(5)\right).$$

Il est clair que **l'assertion a) est vraie** et que **les assertions c) et d) sont fausses**.

Puis :

$$\frac{1}{2}\,(\ln(12)-\ln(5)) = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{12}{5}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}\right) = \ln\left(2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right),$$

en remarquant que $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$. **L'assertion b) est vraie**.

Question 04 : On a : $K = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}\,dx$ et $L = \displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-4}\,dx$. Alors :

$$I = L-2K = \int_3^4 \frac{x}{x^2-4}\,dx - 2\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int_3^4 \frac{x-2}{x^2-4}\,dx = \int_3^4 \frac{1}{x+2}\,dx.$$

Et donc $I = [\ln|x+2|]_3^4$, en utilisant la question 01.
Déjà, **l'assertion a) est vraie** et **l'assertion b) est fausse**.
On termine le calcul : $[\ln|x+2|]_3^4 = \ln(6)-\ln(5) = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$.
Donc **l'assertion c) est vraie** et **l'assertion d) est fausse**.
Remarque : on remarque que si l'assertion b) avait été juste alors l'assertion d) aurait aussi été juste. Faire attention à ce genre de piège que l'on rencontre souvent dans les Q.C.M de l'ENAC, quelque soit leur niveau.

Question 05 : Comme $I = L-2K$, $K = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}\,dx$ vaut $(L-I)/2$.
Pour commencer, **l'assertion a) est fausse** car c'est l'opposé qui est proposé.
Puis : $K = \dfrac{1}{2}\,(L-I) = \dfrac{1}{2}\left(-\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\,(\ln(12)-\ln(5))\right)$,
c'est-à-dire $K = -\dfrac{1}{2}\,\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{1}{4}\,(\ln(12)-\ln(5))$, en utilisant les résultats de la question 03 et de la question 04. Donc **l'assertion c) est vraie**.
Puis : $K = -\dfrac{1}{2}\,\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{1}{4}\,\ln\left(\dfrac{12}{5}\right) = -\dfrac{1}{2}\,\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{1}{4}\,\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{1}{4}\,\ln(2)$.
Et il reste $K = -\dfrac{1}{4}\,\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) + \dfrac{1}{4}\,\ln(2)$. Rien ne ressemble aux deux assertions qui restent : **les assertions b) et d) sont fausses**.

Question 06 : On a pour tout réel a et pour tout réel b :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b.$$

Donc **l'assertion a) est fausse**. Il est clair que, de même, **l'assertion b) est fausse**.
Puis par exemple pour $a=\pi$, $\cos(2a)=1$ et $2\cos(a)=-2$.
Donc **l'assertion c) est fausse**. Enfin, comme $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$,

$$\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) = 1-\sin^2 a - \sin^2 a = 1-2\,\sin^2 a.$$

L'assertion d) est vraie par conséquent.

Remarque : la dernière égalité est à connaître. On a aussi : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, autre égalité qui est à connaître.

Question 07 : On applique les belles égalités de trigonométrie que l'on a rappelé plus haut. Le hasard fait bien les choses ! Si l'on applique la seule assertion vraie de la question 06 avec $a = \pi/8$, on a bien :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

L'assertion a) est vraie. Puis (quitte à dessiner le cercle trigo), $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Donc **l'assertion b) est fausse**. Ensuite :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$. Il reste à comparer avec le résultat proposé à l'assertion c). Pour cela, élevons au carré et étudions l'égalité :

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

En développant, le membre de gauche est bien le membre de droite.
Ainsi, **l'assertion c) est vraie**.
Par contre, $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. **L'assertion d) est fausse**.

<u>Question 08</u> : On rappelle que $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$ pour tout a et b donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(\pi/2)\cos x - \cos(\pi/2)\sin x = \cos x.$$

L'assertion a) est vraie. De même, en utilisant $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$ pour tout a et b,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi/2)\cos x + \sin(\pi/2)\sin x = \sin x.$$

L'assertion c) est vraie. Par contre, **les assertions b) et d) sont fausses**.

Remarque : Les formules $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ permettent de justifier le vocabulaire cosinus par rapport à sinus. Si θ est une latitude, $\pi/2 - \theta$ est la colatitude. De même, ceux qui connaissent $\tan(x)$ (la tangente), qui est le rapport de $\sin(x)$ par $\cos(x)$, peuvent définir $cotan(x)$ (la cotangente) qui est le rapport de $\cos(x)$ par $\sin(x)$ en utilisant : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cotan\,(x)$.