

Table des matières

1	Prologue	11
1.1	Algorithmes	11
1.2	Optimisation unidimensionnelle	13
1.2.1	Méthode de dichotomie	14
1.2.2	Méthode de la section dorée	18
1.3	Résolution d'équations en dimension 1	20
1.3.1	Méthode de Newton Raphson	21
1.3.2	Méthode de la sécante	27
1.4	Rappels d'analyse matricielle	29
1.4.1	Définitions et résultats classiques	29
1.4.2	Quelques considérations numériques	32
1.4.3	Résolution de systèmes linéaires	35
2	Méthodes de descente	45
2.1	Minimum et descente	45
2.2	Conditions d'optimalité	46
2.2.1	Cas différentiable	46
2.2.2	Cas convexe	49
2.2.3	Application : la transformation de Legendre-Fenchel	57
2.3	Algorithmes	61
2.3.1	Méthode du gradient	61
2.3.2	Algorithme de gradient à pas fixe (ou à pas constant).	67
2.3.3	Méthode de relaxation	71
2.3.4	Méthode de Newton	74
2.3.5	Méthodes de gradient conjugué	77
2.3.6	Méthodes de Quasi-Newton	81
2.4	Retour sur la recherche linéaire	89
2.5	Optimisation non-différentiable	93
2.5.1	Inapplicabilité des algorithmes classiques	93
2.5.2	Existence du sous-différentiel pour les fonctions convexes	97

2.6	Algorithmes de sous-gradient	101
2.6.1	Méthode de faisceaux	106
3	Optimisation sous contraintes	109
3.1	Introduction	109
3.2	Approche non-linéaire	110
3.2.1	Théorème des fonctions implicites	110
3.2.2	Contraintes égalité : multiplicateurs de Lagrange	111
3.2.3	Interprétation des multiplicateurs de Lagrange.	118
3.2.4	Contraintes inégalité : multiplicateurs de Karush, Kuhn et Tucker	121
3.2.5	Conditions d’optimalité du second ordre	127
3.3	Approche minimax	128
3.3.1	Un petit jeu à somme nulle	128
3.3.2	Théorème de point-selle	130
3.3.3	Application à la minimisation sous contraintes	132
3.3.4	Cas convexe	134
3.3.5	Existence d’un point-selle	136
3.4	Algorithmes	138
3.4.1	Méthodes admissibles	138
3.4.2	Pénalisation extérieure et intérieure.	143
3.4.3	Forme généralisée du théorème de Karush, Kuhn et Tu- cker (Fritz John)	148
3.4.4	Méthodes de Lagrangien (méthodes dites <i>duales</i>)	152
3.4.5	Méthode “prox” et Lagrangien augmenté	161
3.4.6	Interprétation géométrique des algorithmes d’Uzawa avec Lagrangien et Lagrangien augmenté	170
3.4.7	Minimisation d’une fonction de mérite	175
4	Programmation Linéaire	181
4.1	Modèle et exemples	181
4.2	Un essai de résolution à la main	183
4.3	Le théorème fondamental	186
4.4	Le Simplexe	192
4.4.1	L’algorithme classique du Simplexe	192
4.4.2	Non-dégénérescence et cyclage	193
4.4.3	Initialisation (phase I)	194
4.4.4	Algorithme du Simplexe sous forme révisée (phase II)	194
4.5	Existence et dualité	196
4.5.1	Définitions et lemme de Farkas	196
4.5.2	Existence	200

4.5.3	Problème dual et théorème de dualité	201
4.6	Approches non linéaires : leurs qualités	204
4.7	Algorithme de Karmarkar	205
4.8	Algorithme primal-dual intérieur	212
4.9	Algorithme affine	217
4.10	Remarques sur la phase I : admissibilité	221
4.11	Complexité et convergence polynomiale	223
5	Calcul des variations	231
5.1	Problème élémentaire du Calcul des variations	233
5.1.1	Espaces de courbes, critères et minima	233
5.1.2	Les contraintes	236
5.1.3	Principe du Calcul des variations	237
5.2	Conditions nécessaires d'Euler (premier ordre)	240
5.2.1	Équation d'Euler élémentaire	240
5.2.2	Équation d'Euler vectorielle	243
5.2.3	Détermination d'intégrales premières	243
5.3	Applications de l'équation d'Euler	245
5.3.1	Principe de Hamilton	245
5.3.2	Calcul de géodésiques	248
5.4	Conditions de transversalité	249
5.4.1	Extrémité assujettie à se déplacer sur une courbe	249
5.4.2	Extrémité libre soumise à un coût. Condition limite naturelle.	253
5.5	Problèmes isopérimétriques	254
5.6	Autres conditions d'optimalité	257
5.6.1	Condition suffisante du premier ordre : cas convexe	257
5.6.2	Condition nécessaire du second ordre (Legendre)	257
5.6.3	Problème secondaire et condition suffisante de Jacobi	259
5.6.4	Variation forte : condition de Weierstrass	262
5.6.5	Transformation de Legendre et équations canoniques	264
6	Principe du Maximum de Pontryaguine	267
6.1	Le problème de la Commande optimale	267
6.1.1	État et commande	267
6.1.2	Stabilité, commandabilité, observabilité, détectabilité	271
6.2	Principe du Maximum de Pontryaguine	277
6.2.1	Typologie des problèmes de commande optimale	277
6.2.2	Origine du Principe du Maximum	278
6.2.3	Un énoncé assez général	280
6.2.4	Démonstration du Principe du Maximum	282

6.2.5	Une preuve rigoureuse dans un cadre simplifié	285
6.3	Contraintes intégrales, instantanées, d'état	287
6.4	Applications avec résolution numérique	290
6.4.1	Commande en temps minimal	290
6.4.2	Problèmes linéaires-quadratiques généraux	291
7	Programmation Dynamique	295
7.1	Introduction	295
7.2	Principe d'optimalité en temps discret	296
7.3	Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman discrète	300
7.3.1	Problème de plus Court Chemin	300
7.3.2	Problème de Commande Optimale en temps discret	302
7.3.3	Problème Linéaire Quadratique	307
7.4	Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman continue	311
7.4.1	Problème Linéaire Quadratique	313
7.4.2	Démonstration heuristique du Principe du Maximum	314
7.5	Complexité	316
8	Problèmes de grande taille	319
8.1	Méthodes classiques de décomposition	320
8.1.1	Décomposition par les prix	321
8.1.2	Décomposition par les quantités	322
8.2	Principe du Problème Auxiliaire	325
8.3	Méthodes de coupes et de faisceaux	329
8.3.1	Méthode de coupe ou des plans sécants	329
8.3.2	Les méthodes de faisceaux	332
9	Solutions des exercices	337