A – MECANIQUE DES VIBRATIONS

Chapitre I

INTRODUCTION

Beaucoup de structures mécaniques sont soumises à des efforts variables. Ces efforts se propagent dans les différentes parties et provoquent des déformations, qui mettent en mouvement les masses, localisées ou réparties dans la structure. L'inertie de ces masses prolonge le mouvement, ce qui entraîne de nouvelles déformations. Il s'établit donc un équilibre dynamique, qui évolue à chaque instant, entre les forces d'élasticité et d'inertie, jusqu'à ce que toute l'énergie fournie à la structure ait été dissipée.
On distingue schématiquement la vibration, comportement permanent d'un système mécanique face à une sollicitation durable ou fréquemment répétée, et le choc, comportement transitoire face à une sollicitation isolée.

1 - GENERALITES SUR LES VIBRATIONS DES STRUCTURES

1.1 - Effets nuisibles des vibrations

Il arrive que l'on produise volontairement les vibrations ou les chocs d'un mécanisme, dans le but de générer, avec une source d'énergie modérée, des efforts importants (perforatrice, marteau-piqueur), ou pour mettre en mouvement des objets (tamis, bol vibrant). Cependant, le plus souvent, les effets des vibrations sont nuisibles. Les conséquences les plus fréquemment rencontrées sont :

- la rupture des pièces, par dépassement de la résistance ;
  Par exemple, pour un coefficient de surtension Q = 10 (valeur couramment rencontrée en pratique), un effort exercé sur une pièce, à sa fréquence de résonance, provoque une déformation (et donc une contrainte) 10 fois plus grande que si le même effort s'exerçait statiquement. Un dimensionnement par un calcul statique de résistance est donc très insuffisant dans beaucoup d'applications.

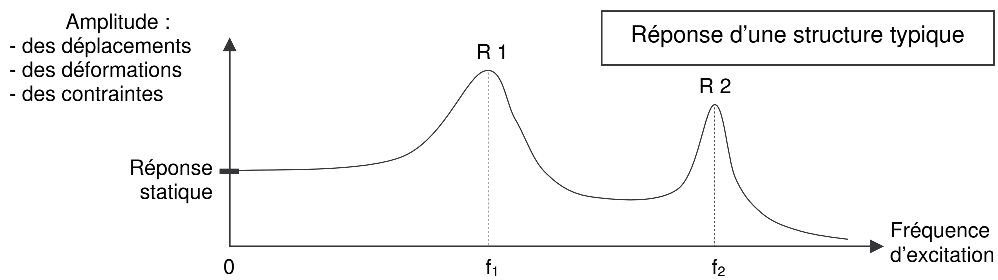
- la rupture des pièces, par fatigue ;
  A une fréquence de 100 Hz par exemple, 12 jours de fonctionnement continu suffisent à atteindre 10^8 cycles de charge, ce qui place largement les matériaux dans le domaine de la fatigue.

- les défauts fonctionnels, occasionnés par les déplacements ;
  Par exemple, les machines-outils à coupe discontinue (particulièrement les fraiseuses) génèrent des efforts de coupe variables, qui engendrent des vibrations de la structure. Celles-ci provoquent un déplacement relatif de l'outil par rapport à la pièce usinée, qui se répercute sur l'état de surface obtenu, et sur la durée de vie des outils.

- le bruit, transmis par l'air ou parfois par un liquide.
  Par exemple, le comportement phonique de l'habitacle d'une automobile vis-à-vis des bruits d'origine mécanique (moteur, transmission, suspension …) ou aérodynamique (écoulement de l'air extérieur, ventilation, échappement …) est un facteur important du confort des passagers.
  De même, les bruits émis par les engins militaires sous-marins, et transmis par l'eau de mer, permettent de les détecter, les localiser et les reconnaître.

1.2 - La résonance

• La résonance est un phénomène essentiel et caractéristique du comportement vibratoire.
Pour la plupart des structures, il existe certaines fréquences, dont l'excitation provoque une réponse très supérieure à la réponse statique. Schématiquement, un graphe de réponse en fréquence typique présente des pics accentués :



Un oscillateur à éléments discrets présente autant de résonances qu'il a de degrés de liberté.
Une structure continue présente une infinité de résonances, dont les fréquences restent cependant séparées les unes des autres.

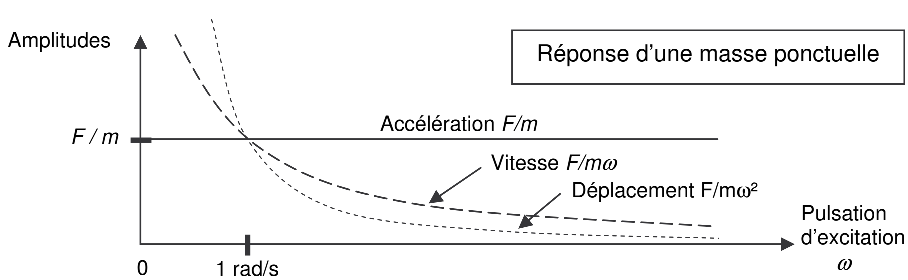
• Ces résonances sont d'autant plus dangereuses qu'elles se produisent à basse fréquence.
Montrons-le dans le cas élémentaire d'une structure constituée par une simple masse ponctuelle.

Considérons une force d'excitation sinusoïdale : $f(t) = F \cos \omega t$

Agissant sur une masse ponctuelle m, elle lui donne une accélération : $\ddot{x}(t) = F/m \cos \omega t$

La vitesse de la masse est : $\dot{x}(t) = F/m\omega \sin \omega t + v_0$

Le déplacement vaut : $x(t) = -F/m\omega^2 \cos \omega t + v_0 t + x_0$



On constate que pour une force d'amplitude constante F, l'amplitude du déplacement est inversement proportionnelle à ω^2. Les défauts fonctionnels sont donc d'autant plus importants que ω est petit.
Les déformations des pièces, et les contraintes élastiques, sont proportionnelles aux déplacements. On en déduit que les risques de rupture sont, eux aussi, d'autant plus grands que ω est petit.

En conséquence, les risques de rupture et les défauts fonctionnels sont généralement déterminés par les premières résonances des structures, situées aux plus basses fréquences.

Par contre, quand on se préoccupe des bruits, on se préoccupe essentiellement des fréquences comprises entre 700 et 5000 Hz environ, car c'est dans ce domaine que la sensibilité de l'oreille humaine est maximale.

- Les fréquences de résonance d'une structure sont d'autant plus élevées :

- qu'elle est plus rigide ;
  Par exemple, une structure massive (comme un lingot) résonne à plus haute fréquence qu'une structure élancée (un profilé ou une tôle). On s'en aperçoit facilement en les faisant sonner par un petit choc avec un objet dur : le lingot émet un son plus aigu que le profilé ou la tôle.

- qu'elle est plus légère ;
  Une structure en matériau composite à hautes performances (carbone, Kevlar) résonne à plus haute fréquence qu'une structure identique en acier, car elle est beaucoup plus légère pour une rigidité à peu près équivalente.

- qu'elle est plus petite.
  Un composant électronique fixé sur un circuit imprimé résonne à haute fréquence (plusieurs kHz), alors qu'un barrage en béton résonne à très basse fréquence (moins de 1 Hz).

Ces effets se combinent souvent. Par exemple, des structures identiques en acier et en aluminium ont sensiblement le même rapport rigidité / masse, elles ont donc sensiblement les mêmes fréquences de résonance.

- L'accident du pont de Tacoma, dans l'état de Washington (Nord-Ouest des USA), constitue un exemple célèbre de résonance dramatique.

Inauguré en juillet 1940, c'était le 3ème pont suspendu du monde, par la taille : long de 1810 m entre culées, sa travée centrale mesurait 840 m. Sa structure était calculée pour résister à des vents exceptionnels de 200 km/h.
Cependant, peu après sa mise en service, les automobilistes qui franchissaient le pont par un vent modéré, se plaignirent de ressentir des mouvements d'oscillation. Le pont fut alors surnommé « Galloping Gertie ». On tenta de le stabiliser en ajoutant des câbles et des amortisseurs hydrauliques, sans grand succès.
Le 7 novembre 1940 se leva un vent de 65 km/h, bien inférieur à celui qui avait servi à dimensionner le pont. Pourtant, le tablier se mit à osciller, avec plusieurs mètres d'amplitude. On évacua immédiatement le pont, mais il s'effondra en quelques heures.
Des photographies et des films spectaculaires montrent le pont en oscillations, et son effondrement final. Ils sont aisément consultables sur Internet (effectuer une recherche sur les mots « tacoma bridge »).

- Dans le cas particulier des machines tournantes, les inévitables défauts d'équilibrage génèrent des efforts périodiques, synchronisés avec la rotation des rotors. Les effets gyroscopiques sur les masses en rotation, et le couplage entre les parties solides et les fluides entraînés, entraînent souvent des comportements vibratoires particulièrement complexes.

1.3 - Conception d'une structure vibrante

- Une précaution élémentaire, dans la conception d'une structure, consiste à éviter d'exciter les résonances. C'est évidemment la meilleure solution, chaque fois qu'elle est possible.

Les sources d'excitation, constituées par des mouvements ou des efforts imposés en divers points de la structure, possèdent parfois des fréquences précises et bien connues.

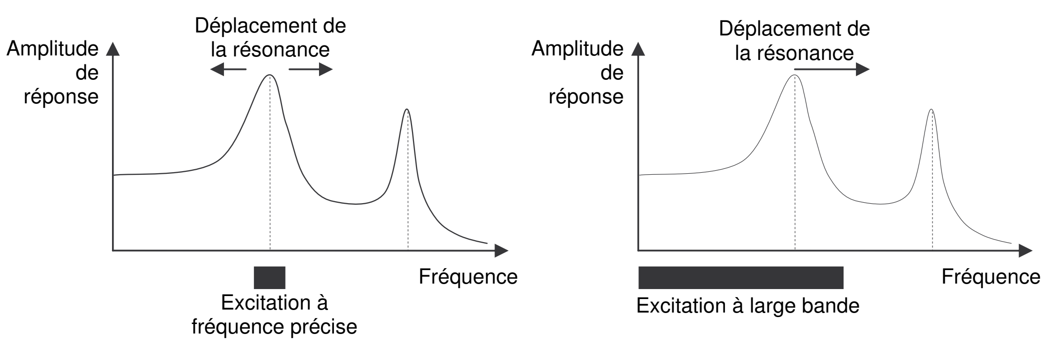
Par exemple, l'alimentation électrique à 50 Hz génère dans les transformateurs, et plus généralement dans tous les bobinages, des forces électromagnétiques à la fréquence de 100 Hz (car à chaque alternance du courant, positive ou négative, les spires sont attirées les unes vers les autres). C'est l'origine du ronflement caractéristique qu'ils émettent souvent.

Il suffit alors de vérifier que les fréquences d'excitation sont suffisamment éloignées des fréquences de résonance. Si ce n'est pas le cas, une quelconque modification de la raideur, de la masse ou des dimensions de la structure permet de déplacer ses résonances. Si toute modification est impossible, on peut aussi déplacer une résonance au moyen d'un résonateur, accordé sur la fréquence gênante.

Plus souvent, les excitations occupent une large bande de fréquences, commençant à la fréquence nulle.

Par exemple, les irrégularités de la chaussée induisent sur la caisse d'un véhicule des mouvements, dont la fréquence s'étend depuis 0 jusqu'à quelques dizaines de hertz. Ces mouvements sont limités dans le domaine des hautes fréquences grâce au filtrage dû aux pneumatiques et à la suspension.

On doit alors vérifier que la première fréquence de résonance se situe au-delà des fréquences excitées. Si ce n'est pas le cas, on tente de la repousser vers les hautes fréquences, en allégeant et en rigidifiant la structure.

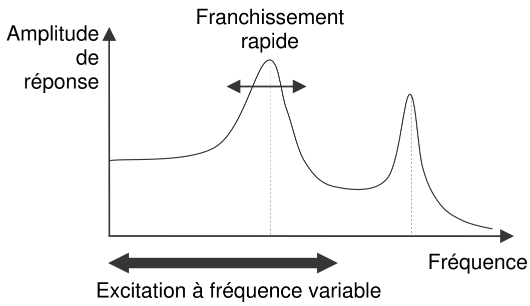


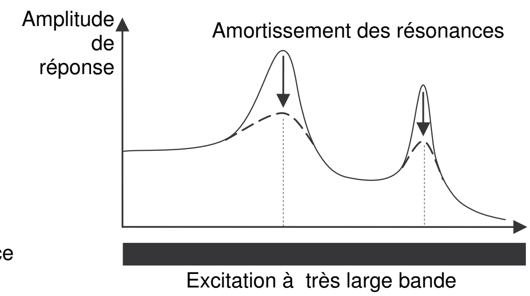
- Certaines machines génèrent des excitations, dont la fréquence varie en fonction du régime de fonctionnement. Si cette variation est suffisamment rapide, on peut admettre que l'excitation rencontre brièvement certaines fréquences de résonance, sous réserve de vérifier que ce régime transitoire n'engendre pas d'effets insupportables.

Par exemple, une turbine fonctionne parfois à des vitesses de rotation élevées, situées au-delà de sa première fréquence de résonance. Au cours des phases de démarrage et d'arrêt, la vitesse de rotation coïncide brièvement avec cette fréquence. Ceci est tolérable si la montée en régime et la descente sont suffisamment rapides.

Il arrive que l'on ne puisse pas éviter de solliciter durablement les résonances d'une structure. Dans ce cas, on cherche à atténuer les mouvements vibratoires en augmentant l'amortissement au moyen de frottements solides ou fluides, de matériaux viscoélastiques, etc, ou même en créant des efforts antagonistes, synchronisés avec la vibration (amortissement actif).

Par exemple, les chocs métal-sur-métal engendrent des forces d'excitation à très large bande (de la fréquence 0, jusqu'à plusieurs kilohertz). Une machine qui subit ces chocs de manière répétée (riveteuse, marteau-pilon …) doit être conçue de manière à supporter les vibrations importantes dues à l'excitation de ses résonances.





- Les étapes essentielles de la conception d'une structure devant supporter des vibrations sont :

- l'étude préliminaire à l'aide de modèles grossiers :
  - modèles à éléments discrets constitués de masses, ressorts et amortisseurs,
  - modèles continus élémentaires constitués de poutres ou de plaques ;

  Cette étude peut être menée analytiquement dans les cas les plus simples. Plus souvent, elle fait appel à une résolution numérique. Elle permet de déterminer approximativement les principales caractéristiques du comportement vibratoire : les premières fréquences de résonance, et les formes modales associées. Elle ne donne cependant que peu d'informations sur l'amplitude des déformations et des contraintes, et donc sur la résistance de la structure.

  Cette étape n'est suffisante que pour des mécanismes simples et peu sollicités, ou largement surdimensionnés.

- l'étude détaillée à l'aide de modèles plus fins, par la méthode des éléments finis ;

  Si les formes et les dimensions des constituants sont modélisées dans le détail, et si cette étude est soigneusement menée, elle peut fournir des résultats précis sur les fréquences et les formes des premiers modes propres de vibration.

  Cependant, les amortissements sont toujours mal connus à ce stade, et certaines parties sont très malcommodes à modéliser (assemblages entre pièces, paliers, fixations au sol, matériaux élastomères ou composites, etc).

  En conséquence, en l'état actuel des techniques, on ne peut prévoir qu'approximativement la réponse de la structure à une excitation. La prévision de la résistance ou des défauts fonctionnels, par le seul calcul, reste très imprécise.

- les essais en vraie grandeur, par l'analyse modale expérimentale.

  Un prototype est soumis à des excitations typiques (efforts sinusoïdaux, ou aléatoires, ou chocs) qui permettent de mesurer avec précision son comportement vibratoire. Le « modèle modal » obtenu peut servir soit à valider directement le dimensionnement, soit à caler un modèle par éléments finis, qui lui-même permettra de prévoir avec précision le comportement et d'affiner la conception.

  Les résultats de cette méthode sont précis et fiables, mais son coût peut être important car elle nécessite la réalisation d'un prototype et d'essais parfois longs et délicats.

1.4 - Essais de vibrations

Avant d'entrer en service, de nombreux appareillages doivent subir une procédure de réception (sur l'appareil destiné au service) ou d'homologation (sur un exemplaire d'une série). Les essais dynamiques, en chocs et en vibrations, font partie des essais d'environnement, qui peuvent comprendre aussi des essais d'humidité, de température, de résistance au feu, etc. On distingue :

- les essais opérationnels, dans lesquels l'appareil est soumis à des sollicitations équivalentes à celles qu'il rencontrera en service réel,
- et les essais de résistance, dans lesquels l'appareil est soumis à des sollicitations supérieures à celles du service réel, en vue de juger de sa durée de vie.

2 - NOTATIONS ET ABREVIATIONS

2.1 - Principales notations utilisées dans cet ouvrage

La variété, et parfois la complexité des notations utilisées par les différents auteurs, constituent des obstacles non négligeables pour l'apprentissage dans le domaine des vibrations. On a choisi d'utiliser ici des notations simples et classiques, en comptant sur le contexte pour lever les éventuelles ambiguïtés. On notera donc généralement :

- en minuscules les scalaires et les vecteurs, ainsi que les fonctions scalaires ou vectorielles :

$$m \;,\; x \;,\; x(t)$$

- en majuscules l'amplitude d'une fonction sinusoïdale, la transformée de Fourier d'une fonction :

$$X \;,\; X(\omega)$$

- en majuscules également, les matrices, ainsi que les fonctions matricielles :

$$M \;,\; H(\omega)$$

- avec un indice les composantes des vecteurs, avec 2 indices les composantes des matrices :

$$x_i \;,\; M_{ij}$$

- avec un point $\dot{}$ ou deux points $\ddot{}$ les dérivées, première ou seconde, par rapport au temps :

$$\dot{x}(t) \;,\; \ddot{x}(t)$$

- avec un ^{T} la transposée d'un vecteur ou d'une matrice :

$$\phi^T \;,\; \Phi^T$$

- avec une étoile * la valeur conjuguée d'une grandeur complexe :

$$s^*$$

Toutes les formules de calcul sont exprimées en unités SI (m, kg, s, etc)

2.2 - Glossaire des abréviations

Comme de nombreuses spécialités techniques, l'étude des vibrations mécaniques utilise largement les acronymes et abréviations, en français et surtout en anglais. On trouvera ci-dessous une liste des plus usités, avec leur équivalent dans les deux langues.

ADC	Analog to Digital Converter	**CAN**	Convertisseur Analogique-Numérique
DAC	Digital to Analog Converter	**CNA**	Convertisseur Numérique-Analogique
DFT	Discrete Fourier Transform	**TFD**	Transformée de Fourier Discrète
DOF	Degree Of Freedom	**DDL**	Degré De Liberté
ESD	Energy Spectral Density	**DSE**	Densité Spectrale d'Energie
FFT	Fast Fourier Transform	**TFR**	Transformée de Fourier Rapide
FRF	Frequency Response Function	**FRF**	Fonction de Réponse en Fréquence
ICP	with Integrated Charge Preamplifier	**-**	à préamplificateur de charge intégré
IRF	Impulse Response Function	**RI**	réponse impulsionnelle
MAC	Modal Assurance Criterion	**-**	MAC (critère de vérification modale)
MDOF	Multiple Degree Of Freedom	**-**	multimodal (multi-degrés de liberté)
MIMO	Multiple Input Multiple Output	**-**	multi-entrées, multi-sorties
pk	PeaK value	**-**	valeur crête
PSD	Power Spectral Density	**DSP**	Densité Spectrale de Puissance
RMS	Root Mean Square	**eff**	valeur efficace
SDOF	Single Degree Of Freedom	**-**	unimodal (à un seul degré de liberté)
SISO	Single Input, Single Output	**-**	mono-entrée, mono-sortie
SRS	Shock Response Spectrum	**SRC**	Spectre de Réponse aux Chocs

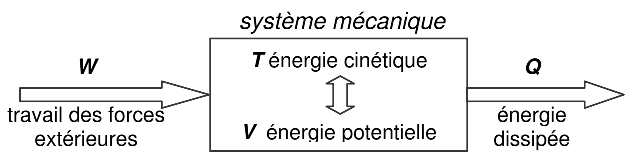
Chapitre II

MODELISATION DES OSCILLATEURS A PARAMETRES DISCRETS

On rappelle ici quelques méthodes classiques destinées à obtenir les équations du mouvement d'un système mécanique : approche énergétique, théorèmes généraux de la dynamique, méthode de Lagrange. On les applique aux oscillateurs à paramètres discrets, à un ou plusieurs degrés de liberté. Le cas des structures continues sera traité plus loin.

1 - APPROCHE ENERGETIQUE

Un système mécanique échange de l'énergie avec le milieu extérieur en recevant un travail W des forces extérieures, et en dissipant une énergie Q , généralement sous forme de chaleur.
Son énergie mécanique interne se répartit entre une énergie cinétique T (due à l'inertie des masses en mouvement), et une énergie potentielle V (due en particulier aux déformations élastiques).



On note avec un signe positif l'énergie motrice (entrant dans le système), et avec un signe négatif l'énergie réceptrice (sortante).
La loi de conservation de l'énergie de ce système s'écrit :

$$T + V = Q + W$$

Ce système constitue un **oscillateur** si son état évolue de façon périodique ou quasi-périodique, par échanges entre énergie cinétique et énergie potentielle. Les vibrations de l'oscillateur résultent d'un équilibre dynamique entre les forces d'inertie et les forces élastiques de rappel. Les forces extérieures et la dissipation d'énergie, quand elles existent, font évoluer cet équilibre au cours du temps.

1.1 - Energie cinétique

Les forces d'inertie, liées aux masses, s'opposent à toute variation de vitesse. Elles ont donc pour effet d'éloigner l'oscillateur de sa position d'équilibre.

L'énergie cinétique est égale au travail nécessaire pour vaincre les forces d'inertie, depuis l'état de repos :

$$\boxed{T = \int_{repos}^{x} - f_{\text{inertie}} \, du}$$

- Pour une masse ponctuelle m animée d'un mouvement de translation $x(t)$, la force d'inertie est $-m\ddot{x}$. L'énergie cinétique vaut alors :

$$T = \int_{repos}^{x} m\,\ddot{x}\,du = \int_{repos}^{t} m\,\ddot{x}\,\frac{du}{d\tau}\,d\tau = \int_{repos}^{t} m\,\ddot{x}\,\dot{x}\,d\tau = m\frac{\dot{x}^2}{2}$$

Plus généralement, si la masse ponctuelle m est animée d'un vecteur vitesse v , son énergie cinétique vaut :

$$T = \frac{1}{2} m\, v^T\, v$$

- Un corps animé d'un mouvement de rotation $\theta(t)$ autour d'un axe passant par O, orienté par le vecteur x, présente un moment d'inertie j_{Ox} (exprimé en kg·m²) par rapport à cet axe. Le moment des forces d'inertie est $-j_{Ox}\ddot{\theta}$ et l'énergie cinétique vaut :

$$T = \int_{repos}^{\theta} j_{Ox}\ddot{\theta}\,d\alpha = \int_{repos}^{t} j_{Ox}\ddot{\theta}\,\frac{d\alpha}{d\tau}\,d\tau = \int_{repos}^{t} j_{Ox}\ddot{\theta}\,\dot{\theta}\,d\tau = j_{Ox}\,\frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

Plus généralement, si le corps, dont la matrice d'inertie en O est J_O , est animé d'un vecteur rotation ω, son énergie cinétique vaut :

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^T\, J_O\, \omega$$

- Pour un corps animé à la fois d'une translation et d'une rotation, deux calculs équivalents sont possibles :
- l'énergie cinétique est égale à la somme des énergies dues à la translation du centre de gravité G, et à la rotation autour de l'axe passant par G, orienté par le vecteur x :

$$T = m\frac{\dot{x}_G{}^2}{2} + j_{Gx}\,\frac{\dot{\theta}^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{1}{2} m\, v_G{}^T\, v_G + \frac{1}{2}\omega^T\, J_G\, \omega$$

- l'énergie cinétique est totalement due à la rotation autour de l'axe instantané de rotation, passant par O, orienté par le vecteur x :

$$T = j_{Ox}\,\frac{\dot{\theta}^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{1}{2}\omega^T\, J_O\, \omega$$

On montre, par application du théorème de Huygens, que ces expressions sont équivalentes.

1.2 - Energie potentielle

Une force f_{pot} dérive d'un potentiel de position si elle peut s'exprimer en fonction des paramètres de position du système, indépendamment du temps. Alors l'énergie potentielle, définie à une constante près, vaut :

$$\boxed{V = \int_{-\infty}^{x} -f_{\text{pot}}(u)\,du}$$

Dans l'étude des vibrations, les forces de rappel qui ramènent l'oscillateur vers son état d'équilibre sont le plus souvent des forces dues à la déformation élastique de certains composants (ressorts). Cependant, d'autres forces de rappel peuvent intervenir dans des cas particuliers : pesanteur agissant sur un pendule, forces aérodynamiques ou hydrodynamiques sur une turbine, forces électromagnétiques sur un bobinage électrique, poussée d'Archimède sur un flotteur, etc.

- Considérons le cas d'un ressort en translation. Il engendre une force de rappel $f(x)$ qui dépend de son allongement x , mesuré depuis la position de repos.