# Chapitre 1
# Rappels sur les nombres complexes

## 1.1 Introduction

On considère l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

qui après le changement de variable $x = y - \frac{a}{3}$ devient

$$y^3 + py + q = 0.$$

Dans la première moitié du XVI^e siècle le mathématicien Cardan donna une formule explicite pour une solution de cette équation

$$y = \Big( -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \Big)^{\frac{1}{3}} + \Big( -\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} \Big)^{\frac{1}{3}} \tag{1.1}$$

à laquelle on donna son nom. Cependant lorsqu'il considéra les solutions de l'équation

$$x^3 = 15x + 4$$

il se posa des questions. Et le mathématicien Bombelli aussi. En effet, 4 est solution de cette équation. Mais si on remplace $p$ par $-15$ et $q$ par $-4$ dans la formule (1.1), on se retrouve avec la quantité $\sqrt{-121}$, racine carrée d'un nombre négatif ! Surmontant sa répulsion, Bombelli note « a plus b (meno di memo) », que l'on écrit $a + ib$ aujourd'hui et on calcule comme pour des nombres usuels en remplaçant $i^2$ par $-1$ quand on le rencontre. Ce nombre $\sqrt{-1}$ qui n'existe pas, sera appelé imaginaire, d'où la notation $i$. Dès lors, par exemple,

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i$$
$$(2 - i)^3 = 2 - 11i$$

d'où, en additionnant les racines cubiques,

$$4 = (2 + 11i)^{\frac{1}{3}} + (2 - 11i)^{\frac{1}{3}},$$

et on retrouve la formule (1.1). Les nombres complexes étaient nés. Par la suite Gauss prouva qu'un polynôme complexe non nul de degré $n$ avait $n$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité à la fin du XVIIIe siècle. Dès le XVIIIe siècle, les nombres complexes s'étaient introduits dans le calcul intégral, et grâce aux développements en séries, Euler montra que ces nombres complexes permettaient un lien entre la fonction exponentielle $e^x$ et les fonctions trigonométriques sinus et cosinus :

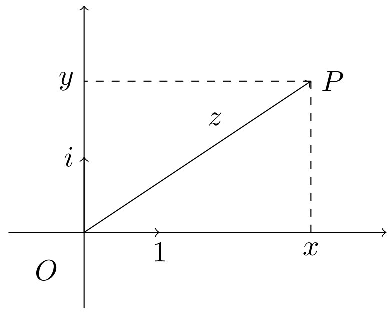
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Il en déduisit la formule $e^{i\pi} = -1$. À la fin du XVIIIe siècle et au début du XIXe siècle, ces nombres furent interprétés géométriquement : ainsi la multiplication par $i$ s'interprète comme une rotation d'un quart de tour. Notons enfin qu'en physique, et notamment en électricité, la lettre $i$ est réservée à l'intensité du courant, et les physiciens préfèrent noter $j^2 = -1$. Malheureusement, la tradition mathématique donne à la lettre $j$ une toute autre signification

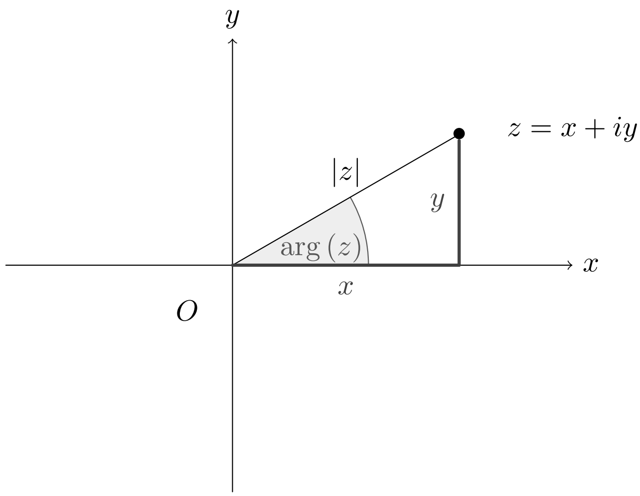
$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \cdots$$

## 1.2 Interprétation géométrique

Nous savons que le plan rapporté à un repère cartésien orthonormé est naturellement identifié à l'espace $\mathbb{R}^2$, au sens où, une fois un repère choisi, tout point $P$ du plan est caractérisé par le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de ses coordonnées cartésiennes et que réciproquement, tout couple de réels représente un unique point du plan dans ce repère. On obtient donc une interprétation géométrique de $\mathbb{C}$ en associant à tout nombre complexe $z = x + iy$ le point $P$ du plan de coordonnées $(x, y)$ (on a choisi un repère cartésien orthonormé une fois pour toutes). Cette interprétation explique pourquoi on parle parfois de plan complexe pour $\mathbb{C}$. Le complexe $z$ s'appelle l'affixe de $P$. On représente aussi le complexe $z$ par le vecteur partant de l'origine et ayant P comme extrémité.




**Définition 1.2.1.** *On appelle module d'un nombre complexe $z$ la longueur du segment $OP$. On le note $|z|$. On appelle argument d'un nombre complexe $z \neq 0$ l'angle orienté (défini modulo $2\pi$) entre le segment $OP$ et le demi axe positif des abscisses. On le note* $\arg(z)$.




Notons que l'on a $|0| = 0$, mais que l'argument de 0 n'est pas défini, puisque dans ce cas $P = O$. En fait, 0 est le seul nombre complexe de module nul.

**Définition 1.2.2.** *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le nombre $x$ est appelé partie réelle de $z$ et $y$ sa partie imaginaire. On note*

$$x = \Re(z) \quad \textit{et} \quad y = \Im(z).$$

**Proposition 1.2.3.** *On a*

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

*et*

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right) \mod 2\pi \ \textit{pour} \ \Re(z) > 0$$

*et*

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right) + \pi \mod 2\pi \textit{ pour } \Re(z) < 0.$$

*Enfin pour* $\Re(z) = 0$, *on a*

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \textit{ si } \Im(z) > 0$$

*et*

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} \mod 2\pi \textit{ si } \Im(z) < 0.$$

*Réciproquement si* $\rho = |z|$ *et* $\theta = \arg(z)$, *on a*

$$\Re(z) = \rho\cos\theta$$
$$\Im(z) = \rho\sin\theta.$$

**démonstration 1.2.4.** *Le segment OP étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, d'après le théorème de Pythagore, on voit que*

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

*Pour l'argument, on voit que si* $\arg z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *c'est-à-dire quand* $\Re(z) \neq 0$ *on a* $\tan(\arg(z)) = \frac{\Im(z)}{\Re(z)}$. *On en déduit les valeurs de l'argument à l'aide des fonctions circulaires inverses (rappelons que la fonction* arctan *prend ses valeurs dans l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *La formule en sens inverse découle directement de la définition des sinus et cosinus d'un angle. Ainsi, on a par exemple* $|i| = 1$ *et* $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$. *On note aussi que si z est réel, son module est égal à sa valeur absolue : le module est le prolongement naturel de la valeur absolue de* $\mathbb{R}$ *à* $\mathbb{C}$. *C'est d'ailleurs pourquoi on utilise la même notation pour les deux notions.*

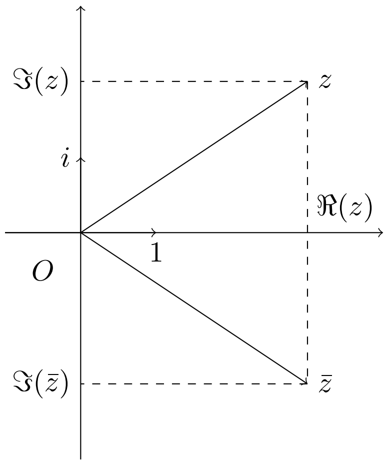
**Définition 1.2.5.** *Soit* $z = x + iy$ *un nombre complexe. On définit son nombre conjugué par*

$$\bar{z} = x - iy.$$

Ce qui donne

$$\Re(\bar{z}) = \Re(z) \quad \text{et} \quad \Im(\bar{z}) = -\Im(z).$$

Du point de vue géométrique, la conjugaison complexe est une symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel.




Les nombres complexes de module 1 décrivent le cercle unité lorsque l'argument décrit un intervalle de longueur $2\pi$.

**Définition 1.2.6.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta. \tag{1.2}$$

*C'est un nombre complexe de module* 1. *On a*

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}. \tag{1.3}$$

*De plus*

$$\arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

**Remarque 1.2.7.** *Notons le cas particulier de $\theta = \pi$ qui donne la célèbre formule d'Euler*

$$e^{i\pi} = -1.$$

On déduit de la définition les formules de Moivre.

**Proposition 1.2.8.** *On a*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Ces formules servent (entre autres) à linéariser les puissances des fonctions circulaires à l'aide de la formule du binôme. En effet,

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \text{pour tout} \quad n \quad \text{entier}. \tag{1.4}$$

## 1.3 Polynômes

Un polynôme à une indéterminée à coefficients complexes est une expression de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \tag{1.5}$$

avec $a_i \in \mathbb{C}$. Si $a_n \neq 0$, alors l'entier $n$ est le degré de $P$. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$. La lettre $X$ désigne l'indéterminée. On peut lui donner un sens mathématique précis, mais pour ce qui nous concerne, on peut tout aussi bien y penser comme à une variable. En fait, un polynôme à coefficients complexes définit une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$z \to P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n. \tag{1.6}$$

L'ensemble de tous les polynômes à une indéterminée à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$. On peut additionner et multiplier les polynômes entre eux de façon naturelle. Tout ce que l'on a dit plus haut se spécialise au cas réel, en remplaçant systématiquement $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$. En particulier, tout polynôme à coefficients réels définit une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais aussi de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On dit qu'un nombre $\zeta \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme $P$ si $P(\zeta) = 0$. Un problème que l'on doit souvent résoudre est de trouver les racines des polynômes. On admettra le résultat suivant.

**Proposition 1.3.1.** *Si $\zeta$ est une racine de $P$, alors $P$ est divisible par $(X-\zeta)$, c'est à dire qu'il existe un autre polynôme $Q$ tel que*

$$P(X) = (X - \zeta)Q(X). \tag{1.7}$$

**Corollaire 1.3.2.** *Un polynôme de degré $n \geq 0$ admet au plus $n$ racines.*

**démonstration 1.3.3.** *En effet, s'il en avait $n+1$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}$, alors on aurait*

$$P(X) = (X - \zeta_1)(X - \zeta_2)\ldots(X - \zeta_{n+1})Q(X)$$

*donc le degré de $P$ serait supérieur à $n+1$, qui est le degré du produit des $n+1$ premiers termes.*

Le théorème suivant qui donne le nombre de racines d'un polynôme est célèbre, c'est le théorème de d'Alembert que l'on admettra car sa démonstration est loin d'être élémentaire.

**Théorème 1.3.4.** *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 0$ admet exactement $n$ racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité). En particulier, si $n \geq 1$, il se factorise entièrement en facteurs du premier degré*

$$P(X) = a_n(X - \zeta_1)(X - \zeta_2)\ldots(X - \zeta_n).$$

Nous allons rappeler les résultats pour les polynômes à coefficients réels de degré 2.

**Théorème 1.3.5.** *Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $a \neq 0, b, c$ sont des éléments de $\mathbb{R}$. On appelle discriminant le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.*

1. *Si $\Delta > 0$ alors $P$ admet deux racines réelles distinctes*
$$\zeta_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad \zeta_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. *Si $\Delta = 0$ alors $P$ admet une racine double*
$$\zeta_1 = \frac{-b}{2a}.$$
3. *Si $\Delta < 0$ alors $P$ admet deux racines complexes conjuguées*
$$\zeta_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad \zeta_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

**démonstration 1.3.6.** *Il suffit de remarquer qu'on peut écrire $P$ sous la forme*
$$P(X) = a\Big((X + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big).$$

## 1.4 Exercices

**Exercice 1 :** Soit $z$ un nombre complexe. Comparer $arg(z)$, $arg(-z)$, $arg(\bar{z})$ et $arg(-\bar{z})$. Illustration graphique.

**Exercice 2 :** Donner la forme cartésienne des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$.
2. $z = \dfrac{2-i}{3i}$.
3. $z = \dfrac{1-i}{3+2i}$.

**Exercice 3 :** Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z = \sqrt{2}(1+i)$.
2. $z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{2}$.
3. $z = \Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\Big)^2$.

**Exercice 4 :** Trouver l'inverse des nombres complexes suivants :

1. $z = \sqrt{2}(1+i)$.
2. $z = 3 - 2i$.
3. $z = \frac{a-2i}{4}$ où $a$ est un nombre réel.

**Exercice 5 :** Linéariser les quantités suivantes, $\theta$ étant un réel

1. $(\cos 2\theta)^2$.
2. $(\sin 2\theta)^2$.
3. $(\cos\theta)^3$.
4. $(\sin\theta)^3$.
5. $(\cos\theta)^4$.

**Exercice 6 :** Calculer les racines des polynômes suivants :

1. $z^2 - 3 - 4i$.
2. $z^2 + 4z + 8$.
3. $z^4 - 4iz^2 - 4$.
4. $z^4 - 16$.
5. $z^3 - 2z^2 + 2z - 1$.
6. $z^2 - 4z + 3 - 2i$.

**Exercice 7 :** Étudier selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z + |z| = \alpha + i$.

## 1.5 Corrigés

**Corrigé 1 :** Nous avons $arg(-z) = arg(z) + \pi$ et $arg(-\bar{z}) = \pi - arg(z)$. Les complexes $z$ et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine et les complexes $z$ et $arg(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Les modules sont tous égaux. On peut aussi considérer que pour passer de $z$ à $-z$ c'est une rotation d'angle $\pi$.