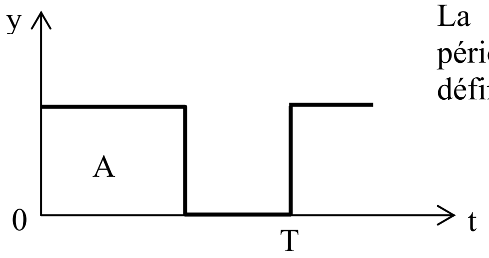
GRANDEURS PERIODIQUES. CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL

1. Propriétés des grandeurs périodiques



La valeur moyenne d'une grandeur périodique de période T, notée < y >, est définie par :

$$\boxed{< y > = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{A}{T}}$$

avec A : aire comprise entre le signal et l'axe des temps pendant la période T.

Remarque : si le signal est alternativement positif et négatif sur la période T, l'aire A est égale à : $A = A_1 - A_2$ avec A_1 l'aire au-dessus de l'axe des temps et A_2 l'aire en dessous.

– La valeur efficace d'une grandeur périodique de période T, notée Y, est définie par :

$$\boxed{Y = \sqrt{< y^2 >}\text{, avec } < y^2 > = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}$$

Remarque : Pour des signaux carrés ou triangles, on peut calculer la valeur efficace par la méthode des aires. Pour cela :

- On élève l'amplitude du signal au carré. On représente $y^2 = f(t)$.
- On calcule sa valeur moyenne par la méthode des aires : $< y^2 > = \frac{A}{T}$.
- On extrait la racine carrée du résultat : $\sqrt{< y^2 >} = Y$.

2. Régime sinusoïdal

– Valeur instantanée d'une tension sinusoïdale :

$$\boxed{u(t) = U_{max}\sin(\omega t + \varphi_u)}$$

avec $\omega = 2\pi f$ (rad.s^{-1}) pulsation de la tension, f sa fréquence (Hz) et U_{max} son amplitude. φ_u est la phase de la tension à l'origine.

– Valeur moyenne et efficace d'une tension sinusoïdale :

$$\boxed{< u > = 0 \text{ et } U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Remarques :

- La valeur instantanée d'une tension sinusoïdale s'écrit aussi :

$$u(t) = U\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \varphi_u)$$

- Les définitions précédentes sont valables quelle que soit la nature de la grandeur sinusoïdale.

– Les différentes puissances en régime sinusoïdal sont :

$P = U\,I\cos\varphi$: puissance active (W) ;
$Q = U\,I\sin\varphi$: puissance réactive (VAR) ;
$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$: puissance apparente (VA) ;

– Le facteur de puissance est égal à : $f_p = \cos\varphi = \dfrac{P}{S}$.

– Théorème de Boucherot : les puissances actives et réactives absorbées par un groupement de récepteurs sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque récepteur.

3. Etude des circuits linéaires

– Un circuit est dit linéaire s'il est uniquement formé de dipôles linéaires (dipôles R, L et C par exemple).

– Les lois du courant continu sont applicables aux régimes variables, à condition de les écrire en valeurs instantanées : par exemple les lois des nœuds ou des mailles.

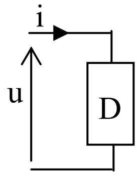
– En régime sinusoïdal, l'étude des circuit se fait en appliquant les lois du continu aux valeurs instantanées ou à leurs grandeurs associées : nombres complexes (diviseur de tension ou de courant, théorèmes de Thèvenin, de Norton et de superposition) et vecteurs de Fresnel (solutions graphiques).

a) Etude des circuits linéaires

A chaque grandeur sinusoïdale (tension ou courant) on peut associer un vecteur de Fresnel et un nombre complexe. Par exemple à la tension $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$, on associe le vecteur $\vec{U} = \left[\left\|\vec{U}\right\|; \varphi_u\right]$ et le nombre complexe $\underline{U} = [U; \varphi_u]$ (en notation polaire).

Le module du nombre complexe $\underline{U}$ est sa valeur efficace U, et son argument est sa phase à l'origine φ_u.

b) Impédance d'un dipôle linéaire



$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = [Z\,;\varphi] = R + jX}$$

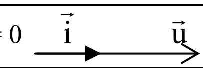
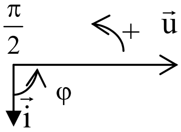
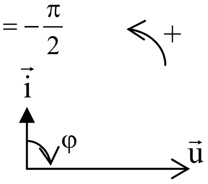
avec :

- le module de $\underline{Z}$ noté Z égal à : $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U}{I}$;
- l'argument de $\underline{Z}$ noté φ (qui représente le déphasage $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ du courant par rapport à la tension à l'alimentation du dipôle) donné par la relation : $\tan\varphi = \dfrac{X}{R}$.

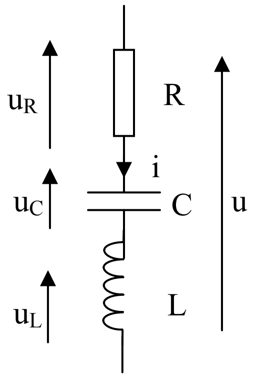
Remarque : on définit l'admittance complexe $\underline{Y}$ comme l'inverse de l'impédance $\underline{Z}$:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

c) Cas des dipôles élémentaires

Composants	Relations	Impédances	Puissances	Diagrammes de Fresnel
Résistance	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{Z} = R = [R\,;0]$	$P = RI^2$ $Q = 0$	$\varphi = 0$ 
Inductance	$\underline{U} = jL\omega\underline{I}$	$\underline{Z} = jL\omega$ $\underline{Z} = \left[L\omega\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = L\omega I^2$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 
Capacité	$\underline{U} = \dfrac{\underline{I}}{jC\omega}$	$\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$ $\underline{Z} = \left[\dfrac{1}{C\omega}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$	$P = 0$ $Q = -U^2C\omega$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ 

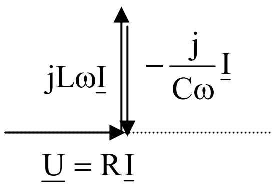
4. Cas d'une association de dipôles élémentaires RLC série, résonance



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_L$$

$$\underline{U} = \left(R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \right) \underline{I}$$

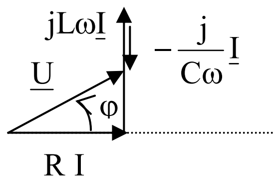
L'étude du circuit se fait suivant trois cas :



$L\omega = \frac{1}{C\omega}$

$\varphi = 0$

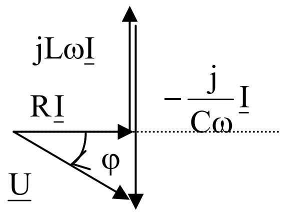
dipôle résistif :
résonance :
le courant est
maximal



$L\omega > \frac{1}{C\omega}$

$\varphi > 0$

dipôle inductif



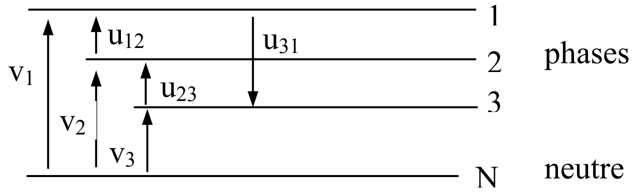
$L\omega < \frac{1}{C\omega}$

$\varphi < 0$

dipôle capacitif

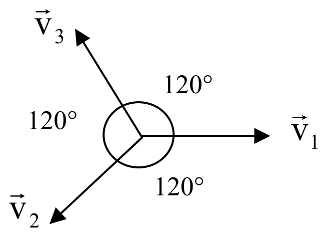
SYSTEMES TRIPHASES

1. Tensions



Le système est composé de trois phases et d'un neutre.
v_1, v_2, v_3 sont les tensions simples, entre phases et neutre :
$(V_1 = V_2 = V_3 = V)$.
u_{12}, u_{23}, u_{31} sont les tensions composées, entre deux phases ;
$(U_{12} = U_{23} = U_{31} = U)$.

$$\overrightarrow{u_{12}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$
$$\overrightarrow{u_{23}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$$
$$\overrightarrow{u_{31}} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$$



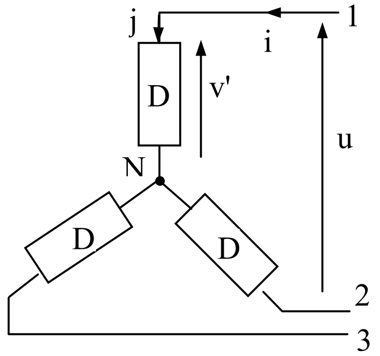
Relation entre les valeurs efficaces des tensions simples et composées :

$$\boxed{U = \sqrt{3}\ V}$$

2. Couplages

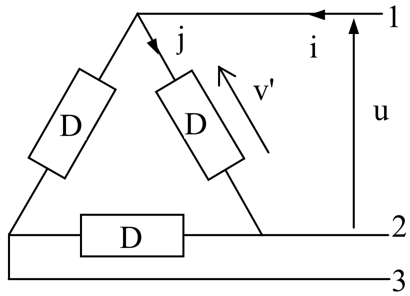
On considère que les trois éléments sont identiques, le système est alors équilibré.

a) Couplage étoile



En étoile, chaque dipôle est soumis à la tension simple v égale à v' et est traversé par le courant par phase j égal au courant en ligne i.
Si le système est parfaitement équilibré, le fil neutre n'est pas nécessaire.

b) Couplage triangle



En triangle, chaque dipôle est soumis à la tension composée u et est traversé par le courant par phase j.
Il n'y a pas de neutre dans le couplage triangle.

Relation entre les valeurs efficaces du courant en ligne et du courant par phase.

$$\boxed{I = \sqrt{3}\ J}$$

3. Puissances en triphasé

Puissance active : $\boxed{P = \sqrt{3}\ UI \cos \varphi}$ ou $\boxed{P = 3\ V'J \cos \varphi}$ (W)

Puissance réactive : $\boxed{Q = \sqrt{3}\ UI \sin \varphi}$ ou $\boxed{Q = 3\ V'J \sin \varphi}$ (var)

Puissance apparente : $\boxed{S = \sqrt{3}\ UI}$ ou $\boxed{S=3V'J}$ (V.A)

a) Relation entre les puissances :

$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2}$ $\boxed{P = S \cos \varphi}$ $\boxed{Q = S \sin \varphi}$ $\boxed{Q = P \tan \varphi}$

b) Effet Joule
On nomme R : la résistance entre deux phases
r : la résistance du dipôle.
– En étoile $R = 2\ r$

Puissance dissipée par effet Joule : $P_{Joule} = 3rJ^2$ ou $\boxed{P_{Joule} = \frac{3}{2} RI^2}$

– En triangle $R = \frac{2}{3} r$

Puissance dissipée par effet Joule : $P_{Joule} = 3rJ^2$ ou $\boxed{P_{Joule} = \frac{3}{2} RI^2}$

4. Relèvement du facteur de puissance

Pour relever le facteur de puissance de cos φ à cos φ', on utilise des condensateurs que l'on couple le plus souvent en triangle. Un condensateur ne consomme pas de puissance active.

Puissance réactive aux bornes d'un condensateur : $\boxed{Q_c = -U^2C\omega}$

Valeur des capacités :

Couplage triangle : $\boxed{C_\Delta = \dfrac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{3\omega U^2}}$

Valeur du courant en ligne I' après ajout des condensateurs :

la puissance active ne changeant pas $P = P' \Rightarrow I \cos\varphi = I' \cos\varphi'$

$$\boxed{I' = \frac{I\cos\varphi}{\cos\varphi'}}$$

AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL PARFAIT. APPLICATIONS

1. Modèle équivalent

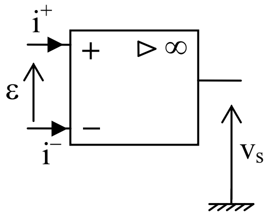
a) Caractéristiques principales. Schéma équivalent.

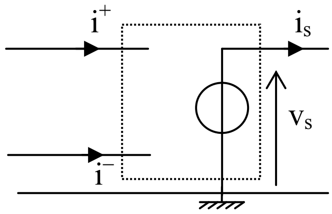
– Les intensités des courants d'entrées sont nulles (la résistance d'entrée différentielle R_e est infinie).

– La résistance de sortie R_s est nulle.

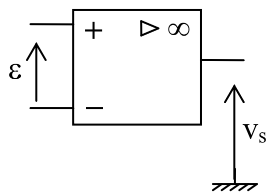
– Le coefficient d'amplification différentiel A_d est supposé infini.

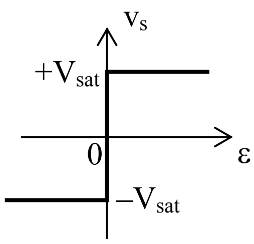
D'où le schéma équivalent de l'A.O. parfait :





b) Fonction de transfert $v_s = f(\varepsilon)$

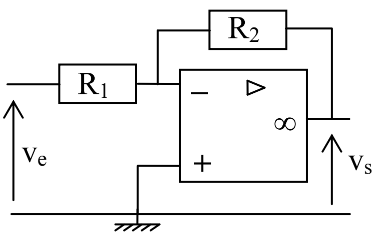




2. Applications linéaires (A.O. parfaits)

La sortie de l'A.O. est reliée à l'entrée inverseuse «–» (contre-réaction) : le fonctionnement est stable et on peut négliger la tension d'entrée différentielle ($\varepsilon = 0$).

a) Amplificateur inverseur



En appliquant le théorème de superposition, on calcule le potentiel de l'entrée inverseuse notée V^- :

$$V^- = v_e \frac{R_2}{R_1 + R_2} + v_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V^+ = 0 .$$

On en déduit la fonction de tranfert :

$$\boxed{v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_e}$$