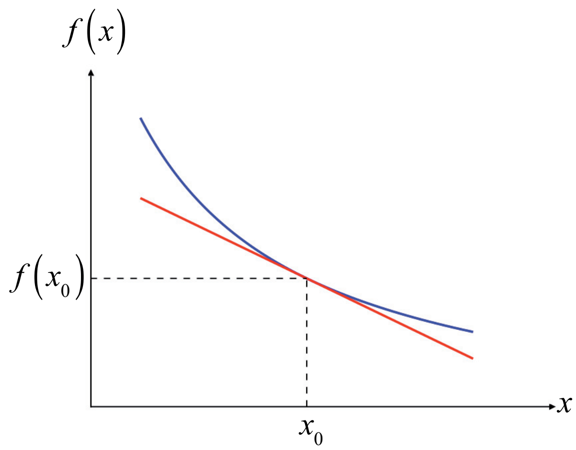
Chapitre 1- Compléments de mathématiques

Ce chapitre est consacré aux notions de mathématiques indispensables pour l'abord des chapitres suivants et qui ne sont pas aux programmes des classes de première ou de terminale.

I. Approximation d'une fonction d'une variable au voisinage d'un point

Considérons une fonction $f(x)$ dérivable et continue au voisinage d'un point d'abscisse x_0. Dans ce paragraphe, nous allons approximer la fonction $f(x)$ (en bleu sur la figure) au voisinage du point d'abscisse x_0 par la tangente à la courbe représentative de $f(x)$ au point d'abscisse x_0 (en rouge sur la figure).



Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 vaut : $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$; cette notation représente la valeur de la dérivée de $f(x)$ par rapport à x pour la valeur x_0 de la variable x. L'équation de la tangente à la courbe représentative de $f(x)$ pour la valeur x_0 de x est donc de la forme $t(x) = x \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} + b$. La valeur de b est telle que $t(x_0) = f(x_0)$, soit : $b = f(x_0) - x_0 \cdot \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$. Au voisinage de x_0 la fonction $f(x)$ peut donc s'approximer par : $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \cdot \left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$. L'approximation est d'autant meilleure que $|x - x_0|$ est petit, comme on peut le constater sur la figure.

Pour améliorer l'approximation, on peut approximer la fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 par une série en puissances de $(x - x_0)$, ce qui revient à approximer $f(x)$ par un polynôme. Dans cet ouvrage, l'approximation, dite du premier ordre, décrite ci-dessus sera suffisante.

Exemple

Calcul de l'expression approchée, au premier ordre, de la fonction $f(x) = (1+x)^m$ au voisinage de $x = 0$.

$f(0) = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = m(1+x)^{m-1} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = m .$$

Donc, au premier ordre, $f(x) \approx 1 + mx$ au voisinage de $x = 0$.

II. Fonctions de plusieurs variables

1. Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

Considérons, par exemple une fonction $f(x,y,z)$ de trois variables x, y et z. On appelle dérivée partielle de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à x :

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x,y,z) - f(x,y,z)}{\mathrm{d}x} .$$

De même, les dérivées partielles par rapport à y et z sont données par :

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{\mathrm{d}y \to 0} \frac{f(x,y+\mathrm{d}y,z) - f(x,y,z)}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{\mathrm{d}z \to 0} \frac{f(x,y,z+\mathrm{d}z) - f(x,y,z)}{\mathrm{d}z} .$$

Pour calculer $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ par exemple, on dérive $f(x,y,z)$ par rapport à x en supposant y et z constants.

Exemple

Calcul des dérivées partielles de $f(x,y,z) = y\ln x - x + z$.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{y}{x} - 1$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \ln x$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 1.$$

2. Différentielle

On appelle différentielle de la fonction $f(x,y,z)$ la quantité :

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

La différentielle d'une fonction représente l'accroissement de la fonction $f(x,y,z)$ lorsque les variables x, y et z ont des accroissements infinitésimaux respectifs $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ par rapport aux coordonnées du point où l'on a calculé les dérivées partielles.

III. Gradient d'une fonction

1. Définition

Dans cet ouvrage, on dénotera les vecteurs unitaires $\vec{e}$. En particulier, les vecteurs unitaires associés aux trois axes d'un système de coordonnées cartésiennes direct seront notés $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$.

On appelle gradient d'une fonction scalaire $f(x,y,z)$ le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{e_z}.$$

2. Propriété fondamentale du gradient

Soit un système de coordonnées cartésiennes d'origine O dans lequel le point M a pour coordonnées x, y et z. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ s'écrit : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ et sa variation lorsque x, y et z s'accroissent respectivement de $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$:

$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$. On voit que le différentielle de la fonction $f(x,y,z)$ est le produit scalaire du gradient de $f(x,y,z)$ et de $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$:

$\mathrm{d}f(x,y,z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

> **Remarque**
>
> À une seule dimension, x, cette relation s'écrit : $\mathrm{d}f(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x$. Ce résultat est strictement équivalent au résultat énoncé au paragraphe I de ce chapitre donnant l'accroissement $f(x) - f(x_0)$ de la fonction en fonction de l'accroissement $x - x_0$ de la variable. Le résultat ci-dessus suppose un accroissement infinitésimal (c'est-à-dire tendant vers 0) ; celui établi au paragraphe I étend cette propriété à de petits accroissements et n'est donc qu'une approximation.

III. Produit vectoriel

En terminale, le produit scalaire de deux vecteurs a été introduit. Dans ce paragraphe, on va introduire un second type de produit entre deux vecteurs : le produit vectoriel ; comme son nom l'indique, le résultat de ce produit est un vecteur !

1. Définition

Soient deux vecteurs s'écrivant dans un système de coordonnées cartésiennes direct :

$\vec{A} = A_x\overrightarrow{e_x} + A_y\overrightarrow{e_y} + A_z\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{B} = B_x\overrightarrow{e_x} + B_y\overrightarrow{e_y} + B_z\overrightarrow{e_z}$. On appelle produit vectoriel de $\vec{A}$ par $\vec{B}$, noté $\vec{A} \times \vec{B}$ ou $\vec{A} \wedge \vec{B}$, le vecteur :

$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\overrightarrow{e_x} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\overrightarrow{e_y} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\overrightarrow{e_z}$.

Si on applique cette définition aux vecteurs unitaires de la base :

$\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}$, $\overrightarrow{e_y} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y}$.

On remarque également que $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$.

2. Propriétés du produit vectoriel

a. Anti-commutativité

Effectuons le produit vectoriel $\vec{B} \times \vec{A}$:

$\vec{B} \times \vec{A} = \left(B_yA_z - B_zA_y\right)\overrightarrow{e_x} + \left(B_zA_x - B_xA_z\right)\overrightarrow{e_y} + \left(B_xA_y - B_yA_x\right)\overrightarrow{e_z}$. On constate que chaque composante de ce produit est l'opposée de la composante correspondante du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$. Donc : $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$.

b. Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

Calculons $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C}$:

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C} = &\left[\left(A_y+B_y\right)C_z-\left(A_z+B_z\right)C_y\right]\vec{e_x}+\\ &\left[\left(A_z+B_z\right)C_x-\left(A_x+B_x\right)C_z\right]\vec{e_y}+\\ &\left[\left(A_x+B_x\right)C_y-\left(A_y+B_y\right)C_x\right]\vec{e_z}\end{aligned}$$

En regroupant les termes du deuxième membre, l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C} = &\left(A_yC_z-A_zC_y\right)\vec{e_x}+\left(B_yC_z-B_zC_y\right)\vec{e_x}+\\ &\left(A_zC_x-A_xC_z\right)\vec{e_y}+\left(B_zC_x-B_xC_z\right)\vec{e_y}+\\ &\left(A_xC_y-A_yC_x\right)\vec{e_z}+\left(B_xC_y-B_yC_x\right)\vec{e_z}\end{aligned}$$

La première colonne du second membre représente $\vec{A}\times\vec{C}$ et la seconde $\vec{B}\times\vec{C}$. Donc : $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$.

De même : $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$.

c. Associativité des scalaires

Soient deux scalaires α et β.

$$\begin{aligned}\left(\alpha\vec{A}\right)\times\left(\beta\vec{B}\right) = &\left(\alpha A_y\beta B_z-\alpha A_z\beta B_y\right)\vec{e_x}+\\ &\left(\alpha A_z\beta B_x-\alpha A_x\beta B_z\right)\vec{e_y}+\\ &\left(\alpha A_x\beta B_y-\alpha A_y\beta B_x\right)\vec{e_z},\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire en mettant $\alpha\beta$ en facteur dans le second membre : $\left(\alpha\vec{A}\right)\times\left(\beta\vec{B}\right)=\alpha\beta\left[\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{e_x}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{e_y}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{e_z}\right]$. On reconnaît $\vec{A}\times\vec{B}$ à l'intérieur du crochet. Donc : $\left(\alpha\vec{A}\right)\times\left(\beta\vec{B}\right)=\alpha\beta\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$.

d. Produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires

Un vecteur $\vec{B}$ est colinéaire au vecteur $\vec{A}$ si $\vec{B}=\alpha\vec{A}$. Comme $\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}$, $\vec{A}\times\alpha\vec{A}$ est aussi nul d'après la propriété démontrée ci-dessus.

- **Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul**

e. $\vec{A}\times\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$

Calculons $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{A}$:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{A}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)A_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)A_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)A_z.$$

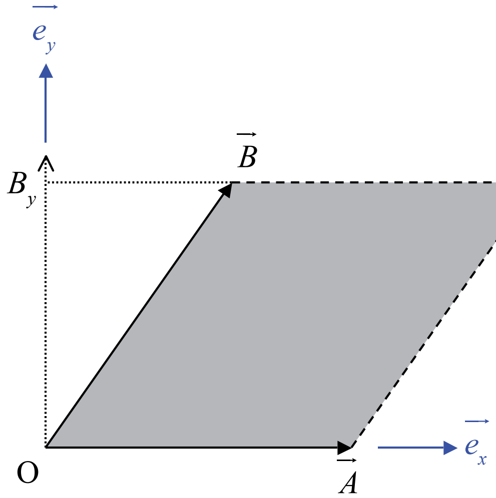
En mettant les composantes du vecteur $\vec{B}$ en facteur dans le second membre :

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{A}=B_x\left(A_zA_y-A_yA_z\right)+B_y\left(A_xA_z-A_zA_x\right)+B_z\left(A_yA_x-A_xA_y\right)=0$$

Donc $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{A}=0$. De même $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{B}=0$. Cela signifie que : $\vec{A}\times\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$.

f. Propriété géométrique du produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et un repère orthonormé direct $\left\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right\}$. Choisissons l'axe des x colinéaire au vecteur $\vec{A}$ et orienté dans le sens de celui-ci et l'axe des y tel que le vecteur $\vec{B}$ soit dans le plan formé par les axes x et y.



On a donc : $\vec{A}=A_x\vec{e_x}$ et $\vec{B}=B_x\vec{e_x}+B_y\vec{e_y}$ où A_x et B_x sont les composantes de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ selon $\vec{e_x}$ et B_y la composante de $\vec{B}$ selon $\vec{e_y}$.

$\vec{A}\times\vec{B}=A_xB_y\vec{e_z}$ où le vecteur unitaire $\vec{e_z}$ est perpendiculaire au plan de la figure. A_x n'est autre que la norme du vecteur $\vec{A}$. B_y est la hauteur, perpendiculaire à $\vec{A}$, du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. La surface d'un parallélogramme étant égale à sa base multipliée par sa hauteur, $\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\|=\left\|\vec{A}\right\|\cdot\left|B_y\right|$ n'est autre que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

- **La norme d'un produit vectoriel est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.**

D'autre part, $B_y=\left\|\vec{B}\right\|\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)$ où $\left(\vec{A},\vec{B}\right)$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Donc : $\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\|=\left\|\vec{A}\right\|\cdot\left\|\vec{B}\right\|\cdot\left|\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)\right|$.

g. Dérivation d'un produit vectoriel

Supposons que les composantes des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dépendent d'une variable t. Dans ce paragraphe, nous allons calculer la dérivée du produit vectoriel $\vec{A}\times\vec{B}$ par rapport à t. En utilisant la définition du produit vectoriel :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}B_z+A_y\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}B_y-A_z\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_x+$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}B_x+A_z\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}B_z-A_x\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_y+$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}B_y+A_x\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}B_x-A_y\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_z,$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}B_z-\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}B_y\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}B_x-\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}B_z\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}B_y-\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}B_x\right)\vec{e}_z$$
$$+\left(A_y\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t}-A_z\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_x+\left(A_z\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}t}-A_x\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_y+\left(A_x\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}t}-A_y\frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}t}\right)\vec{e}_z.$$

La première ligne du second membre représente $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}$, alors que la seconde ligne du deuxième membre représente $\vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$. Donc :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}.$$

IV. Produit mixte

1. Définition

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, le scalaire $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$.

2. Propriétés

a. Le produit mixte est invariant par permutation circulaire

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)C_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)C_y+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)C_z,$$

ce qui peut s'écrire :

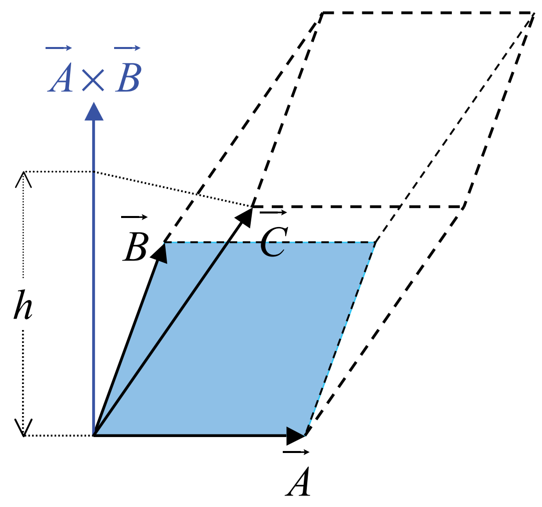
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\left(B_yC_z-B_zC_y\right)A_x+\left(B_zC_x-B_xC_z\right)A_y+\left(B_xC_y-B_yC_z\right)A_z.$$

Dans le second membre, on reconnaît : $\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A}$. De même, en mettant les composantes du vecteur $\vec{B}$ en facteur dans le second membre, on constaterait que : $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{B}$. Donc :

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{A}=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\cdot\vec{B}.$$

- **Le produit mixte est invariant par permutation circulaire.**

b. Propriété géométrique du produit mixte



$\vec{A}\times\vec{B}$ est un vecteur orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$; sa norme est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et représenté en bleu sur la figure. $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$ est égal la norme de $\vec{A}\times\vec{B}$ multipliée par la projection de $\vec{C}$ sur $\vec{A}\times\vec{B}$. La projection de $\vec{C}$ sur $\vec{A}\times\vec{B}$ n'est autre que la hauteur h du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$. Le volume d'un parallélépipède étant égal au produit de la surface de sa base par sa hauteur, $\left|\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}\right|$ n'est autre que le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

- **La valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs est égale au volume du parallélépipède construit à partir des trois vecteurs.**

V. Systèmes de coordonnées

Les systèmes de coordonnées cartésiennes ne sont pas toujours les plus appropriés. Dans ce paragraphe, nous allons considérer deux systèmes de coordonnées qui sont pratiques lorsqu'on est confronté à des problèmes ayant une symétrie cylindrique ou une symétrie sphérique. Les coordonnées cylindriques seront, en particulier, adaptées à l'étude des systèmes invariants par rotation autour d'un axe et les coordonnées sphériques à l'étude des systèmes invariants par rotation autour d'un point.

1 . Coordonnées cylindriques

Pour définir les coordonnées cylindriques, on va se référer à un système de coordonnées cartésiennes direct.