1
Bien raisonner

1. VERITES ET MENSONGES

Les propositions

On émet des propositions : « Aujourd'hui, le ciel est bleu », « Les Syriens sont africains », « Le triangle ABC est rectangle »,… Ou elles sont vraies ou elles sont fausses (les mathématiques sont sévères et n'admettent pas les demi-mesures).

Soit une proposition, notée P. Sa proposition contraire, sa négation, se note $\overline{P}$. Par exemple, si P dit : « Le triangle ABC est rectangle », alors $\overline{P}$ dit : « Le triangle ABC n'est pas rectangle ». Ou si on a P : « Je prends du fromage ou du dessert » alors on a $\overline{P}$: « Je ne prends pas de fromage et je ne prends pas de dessert ».

Si P est vraie alors $\overline{P}$ est fausse, et si P est fausse alors $\overline{P}$ est vraie. Pour une proposition P, il n'y a que deux possibilités : ou c'est P qui est vraie ou c'est $\overline{P}$ qui est vraie.

La preuve par contre-exemple de la fausseté d'une proposition

Soit la proposition P : « Quel que soit le réel x, on a $x^2 \geq 2x+3$ ». Ou P est vraie ou son contraire $\overline{P}$ est vraie. Rédigeons $\overline{P}$: « Il existe au moins un réel x tel que $x^2 < 2x+3$ », car le contraire de « tous les x » est « pas tous les x », c'est-à-dire « au moins un ». Pour prouver que $\overline{P}$ est vraie, il suffit de donner une valeur de x telle que $x^2 < 2x+3$; c'est fait avec $x=0$ puisque $0^2 < 2\times 0+3$. $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse. On dit qu'on a prouvé la fausseté de P par contre-exemple.

L'enchaînement des propositions, l'implication

Il y a des propositions qui s'enchaînent et d'autres qui ne s'enchaînent pas.

Par exemple, P : « Le triangle ABC est rectangle en A » entraîne la proposition Q :

« $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » ; c'est le théorème de Pythagore. Ou encore P : « Le triangle ABC est équilatéral » implique la proposition Q : « Les angles du triangle valent 60° ». Il y a aussi des implications fausses, P : « $a = b + c$ » n'implique pas la proposition Q : « $a^2 = b^2 + c^2$ ».
Soient deux propositions P et Q. On dit que P implique Q, noté $P \Rightarrow Q$ si le fait que P est vraie entraîne le fait que Q est vraie.
L'implication : « Je suis né sur Mars » $\Rightarrow$ « Je suis un martien » est vraie (bien que je ne sois pas né sur Mars mais ce n'est pas la même histoire).

Conditions nécessaires et suffisantes, l'équivalence

Si $P \Rightarrow Q$ on dit qu'il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie. La vérité de P est une condition suffisante à la vérité de Q.
Ça ne veut pas dire que c'est une nécessité. Si P est : « Je suis né en France » et Q est : « Je suis né en Europe », alors il suffit que je sois né en France pour être européen mais ce n'est pas nécessaire, car si j'étais né en Italie je serais aussi européen. Mathématiquement, P implique Q mais Q n'implique pas P. Ces propositions ne sont pas équivalentes.
On dit que les deux propositions P et Q sont équivalentes si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$; on écrit alors $P \Leftrightarrow Q$. On dit aussi que, dans ce cas, l'implication directe est vraie ($P \Rightarrow Q$) et que l'implication réciproque ($Q \Rightarrow P$) est aussi vraie.
On dit aussi que P est vraie si et seulement si Q est vraie.
On dit encore : pour que P soit vraie il faut et il suffit que Q soit vraie.

Il y a des équivalences célèbres :

- « Le triangle ABC est rectangle en A » $\Leftrightarrow$ « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »,
- « M est le milieu de [AB] » $\Leftrightarrow$ « $\vec{AM} = \vec{MB}$ »,
- un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul,
- soient deux polynômes P(x) et Q(x) ; pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$ si et seulement si les coefficients des polynômes P et Q sont identiques.

Mais il y a des implications pour lesquelles la réciproque est fausse :

- « Les entiers a et b sont pairs » $\Rightarrow$ « L'entier $a + b$ est pair » (la réciproque est fausse car il y a des sommes paires d'entiers impairs),
- « M est le milieu de [AB] » $\Rightarrow$ « $AM = MB$ » (la réciproque est fausse car si $AM = MB$ on en déduit seulement que M est sur la médiatrice de [AB]).

Il faut toujours faire attention à savoir si on écrit des implications ou des équivalences. Par exemple, pour résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$, on obtient, en combinant, $2x = 8$. On peut donc écrire : $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x = 8$, mais il n'y a pas équivalence car la seule information $2x = 8$ ne peut pas nous ramener au système vu que nous ne savons alors plus rien de y. Il vaudra donc mieux écrire : $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$, garder une information sur y pour pouvoir remonter du deuxième système au premier.

Ainsi : $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$.

✍ Exercice d'application 1

Pour les propositions suivantes, rédiger $\overline{P}$, et dire ensuite, en justifiant la réponse, laquelle, de P et $\overline{P}$ est vraie.

P_1 : « Il existe au moins un réel x tel que $x^2 + x + 1 < 0$ »

P_2 : « Pour tout réel x, on a $x \geq -x$ »

P_3 : « Pour tout réel x, on a $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ »

P_4 : « La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_n = 3 \times (-2)^n$, est décroissante »

P_5 : « Quels que soient les réels non nuls a, b, c, d, si $\begin{cases} a \geq c \\ b \geq d \end{cases}$, alors $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ »

P_6 : « Les mathématiques sont toujours agréables ».

Corrigé

La négation de P_1 est $\overline{P_1}$: « Tous les réels x vérifient $x^2 + x + 1 \geq 0$ ». Pour savoir laquelle est vraie étudions le signe du trinôme $x^2 + x + 1$. Son discriminant Δ vaut : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, donc ce trinôme a toujours le même signe, celui de $a = 1 > 0$.

$$\boxed{\overline{P_1} \text{ est vraie.}}$$

La négation de P_2 est $\overline{P_2}$: « Il existe au moins un réel x tel que $x < -x$ ». Choisissons $x = -2$, pour lequel $-x = 2$. $\overline{P_2}$ est donc vraie. Nous venons de prouver que P_2 est fausse par un contre-exemple.

$$\boxed{\overline{P_2} \text{ est vraie.}}$$

La négation de P_3 est $\overline{P_3}$: « Il existe au moins un réel x tel que $(x+1)^3 \neq x^3+3x^2+3x+1$ ». Il faut savoir si les deux polynômes $(x+1)^3$ et x^3+3x^2+3x+1 sont identiques. Pour cela, développons $(x+1)^3$. On a : $(x+1)^3=(x+1)^2(x+1)=(x^2+2x+1)(x+1)=...=x^3+3x^2+3x+1$; ces deux polynômes sont bien identiques.

$\boxed{P_3 \text{ est vraie.}}$

La négation de P_4 est $\overline{P_4}$: « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n=3\times(-2)^n$, n'est pas décroissante ». Laquelle est juste ? Faut-il encore comprendre que « pas décroissante » ne veut pas dire « croissante » ; les suites sont souvent ni croissantes ni décroissantes. Ainsi en va-t-il de celle-là car $u_0=3\times(-2)^0=3$, $u_1=3\times(-2)^1=-6$ et $u_2=3\times(-2)^2=12$. On a donc $u_1 \leq u_0$ et $u_2 \geq u_1$, elle n'est pas décroissante (ni croissante).

$\boxed{\overline{P_4} \text{ est vraie.}}$

La négation de P_5 est $\overline{P_5}$: « Il existe des réels non nuls a, b, c, d, tels que $\begin{cases} a \geq c \\ b \geq d \end{cases}$ avec $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ » ; autrement dit, la conclusion annoncée dans P_5 « ne marcherait pas toujours ». C'est P_5 qui est fausse ; ce n'est pas parce que le numérateur et le dénominateur grandissent que la fraction grandit. Une fraction est une question de proportion, de rapport (« rapport » : vieux mot pour désigner une fraction). Donnons un contre-exemple pour prouver que P_5 est fausse et, donc, que $\overline{P_5}$ est vraie. Prenons $a=10$, $b=5$, $c=5$, $d=1$. Alors : $\begin{cases} 10 \geq 5 \\ 5 \geq 1 \end{cases}$ et, pourtant, $\frac{10}{5} < \frac{5}{1}$.

$\boxed{\overline{P_5} \text{ est vraie.}}$

La négation de P_6 est $\overline{P_6}$: « Les mathématiques ne sont pas toujours agréables ». Laquelle est vraie ? C'est une question de goûts et, les goûts ne se discutant pas, je ne poursuis pas plus avant la conversation.

2. MANIERES DE RAISONNER

Les mathématiques cherchent à savoir si des implications sont vraies, si des équivalences sont vraies. Comment faut-il s'y prendre ? Il y a quelques manières de faire qu'on va répertorier.

2.1. Trois raisonnements pour prouver une implication

Le raisonnement direct

Soient les deux propositions P : « n est un entier pair » et Q : « n^2 est un entier pair ». On veut prouver que $P \Rightarrow Q$.

Raisonnons directement, allons-y franco.

Prenons n un entier pair. Soit n un entier pair quelconque, dit-on. Alors n est un multiple de 2. Il existe un entier k tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Donc $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$. L'entier n^2 est un multiple de 2, puisque $2k^2$ est un entier. Donc n^2 est pair, cqfd (ce qu'il fallait démontrer).

Ainsi en démarrant de la vérité de P on est arrivé directement, par un enchaînement logique, à la vérité de Q.

Le raisonnement par contraposition

Soient deux propositions P et Q.

Expliquons d'abord pourquoi $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

On sait que $P \Rightarrow Q$; alors si $\overline{Q}$ est vraie on en déduit que $\overline{P}$ est vraie, car si $\overline{P}$ était fausse, si P était vraie, alors Q serait vraie et $\overline{Q}$ serait fausse et pas vraie (vous suivez ?).

Ainsi il revient au même de dire : « Il pleut $\Rightarrow$ je prends mon parapluie » ou « Je ne prends pas mon parapluie $\Rightarrow$ il ne pleut pas ».

Ou il revient au même de dire : « ABC est rectangle en A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ » ou de dire : « $BC^2 \neq AB^2 + AC^2 \Rightarrow$ ABC n'est pas rectangle en A ».

Donc, prouver $P \Rightarrow Q$ revient au même que de prouver $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Les implications équivalentes $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appellent des contraposées. Pour prouver $P \Rightarrow Q$, on peut prouver que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, on dit alors qu'on fait un raisonnement par contraposition.

Par exemple, prouvons de cette façon que $P \Rightarrow Q$ avec P : « pour tout réel x, $ax + b = a'x + b'$ » et Q : « $a = a'$ ».

Supposons donc que $\overline{Q}$ est vraie, que $a \neq a'$. Alors $ax + b = a'x + b'$ si et seulement si $(a - a')x = b' - b$, si et seulement si $x = \dfrac{b' - b}{a - a'}$ (on a pu diviser par $a - a'$ parce que $a - a' \neq 0$). On est arrivé au fait que $\overline{P}$ est vraie, car il n'y a qu'un et un seul x pour lequel $ax + b = a'x + b'$, et pas tous les x. On vient donc de prouver : $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$.

Le raisonnement par l'absurde

Pour prouver que $P \Rightarrow Q$ on peut aussi raisonner par l'absurde. On suppose, au départ, $\begin{cases} \text{P vraie} \\ \text{Q fausse} \end{cases}$ et on enchaîne logiquement en vue d'aboutir à une absurdité, ce qui prouvera que si P est vraie alors Q ne peut être fausse, donc qu'elle est vraie.
Par exemple, soit P : « Le réel x est rationnel et le réel y est irrationnel » et
Q : « $x+y$ est irrationnel » (Je rappelle que les réels sont rationnels ou irrationnels, un rationnel étant un réel qui est une fraction d'entiers). Prouvons que $P \Rightarrow Q$ par l'absurde. On suppose donc que $\begin{cases} \text{x est rationnel et y est irrationnel} \\ \text{x + y est rationnel} \end{cases}$, et continuons sur cette piste jusqu'à l'absurdité. Comme x est rationnel et $x+y$ aussi, il existe des entiers a, b, c, d tels que : $x = \frac{a}{b}$ et $x + y = \frac{c}{d}$. Mais alors, $y = (x+y) - x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - da}{db}$; ce serait une fraction d'entiers, un rationnel. C'est absurde puisque y n'est pas rationnel. Donc $P \Rightarrow Q$.

2.2. Prouver une équivalence

Pour prouver que $P \Leftrightarrow Q$, on doit prouver que $P \Rightarrow Q$ et que $Q \Rightarrow P$. Mais parfois, les deux preuves se font en même temps, et parfois ce n'est pas possible.

Par exemple, prouvons que $2x + 4 = 6 \Leftrightarrow x = 1$, avec P : « Le réel x vérifie $2x + 4 = 6$ » et Q : « $x = 1$ ».
On écrit : $2x + 4 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 - 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 1$. Si la voie directe et la voie réciproque se sont faites en même temps c'est que les calculs étaient réversibles.
Mais parfois, et ce peut être le cas en terminale, les calculs ne sont pas réversibles.

Par exemple, soit à résoudre l'équation $\sqrt{x+6} = x$. Elevons au carré les deux membres puisque $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$. On obtient : $\sqrt{x+6} = x \Rightarrow x + 6 = x^2$. Mais ce n'est pas réversible car $a^2 = b^2$ n'implique pas $a = b$, mais $a = b$ ou $a = -b$. On est donc parti pour démontrer seulement $P \Rightarrow Q$.
Continuons : $x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow ..... \Rightarrow x = -2$ ou $x = 3$.
On vient de prouver que « $\sqrt{x+6} = x$ » $\Rightarrow$ « $x = -2$ ou $x = 3$ », de faire l'analyse du problème, dit-on. On vient de prouver que si x est solution de l'équation alors $x = -2$ ou $x = 3$.

Comme si on disait : « je suis européen » $\Rightarrow$ « Je suis français ou italien ou allemand ou… », mais je ne suis pas nécessairement tout à la fois. Reste donc à examiner la réciproque, à faire une vérification, dit-on dans les petites classes, à faire une synthèse, dit-on dans les grandes classes.

$x=-2$ est peut-être une solution mais l'est-elle vraiment ? Vérifions : $\sqrt{4}=-2$; non, impossible, une racine ne pouvant, par définition, donner une réponse négative. Donc $x=-2$ n'est pas une solution. Pour $x=3,$ vérifions : $\sqrt{9}=3$; c'est vrai, le réel 3 est réellement solution.

Conclusion générale : la solution de l'équation est $S=\{3\}$.

On dit qu'on a fait un raisonnement par analyse et synthèse.

✍ Exercice d'application 2

1. Prouver par un raisonnement direct que : « $a>2 \Rightarrow a^2>4$ ».
2. Prouver par un raisonnement par contraposition que, pour un trinôme ax^2+bx+c : « $\Delta<0 \Rightarrow$ a et c ont le même signe ».
3. Prouver par l'absurde que, le plan étant rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$, « si a et b sont des réels tels que $a\vec{i}+b\vec{j}=0$ alors $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ ».
4. Résoudre, par analyse et synthèse, l'équation $\sqrt{2x^2+6x+1}=x+2.$

Corrigé

1. Soit un réel a tel que $a>2.$ Elevons les deux membres aux carrés ; ils donnent a^2 et 4. Ces résultats sont-ils dans le même ordre qu'au départ ? Tout dépend si l'opération « élever au carré » conserve l'ordre ; tout dépend si la fonction $f(x)=x^2$ est strictement croissante à l'endroit considéré. Oui, car elle est croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[donc sur [2 ; +∞[. C'est prouvé !

2. Pour prouver $P \Rightarrow Q$, on va prouver $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}.$ Supposons donc vraie la négation de Q, $\overline{Q}$: « a et c sont de signes contraires » et prouvons alors (directement) qu'est vraie $\overline{P}$: « $\Delta \geq 0$ ». Si a et c sont de signes contraires, alors 4ac est négatif et, donc, $-4ac$ est positif. Mais alors, $\Delta=b^2-4ac=b^2+(-4ac)$ est une somme de positifs et donc Δ est positif, $\Delta \geq 0.$ C'est prouvé !

3. Raisonnons par l'absurde pour prouver $P \Rightarrow Q$. Supposons vraies P et $\overline{Q}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} \text{a et b ne sont pas tous les deux nuls} \\ a\vec{i} + b\vec{j} = \vec{0} \end{cases}$. Si a et b n'étaient pas tous deux nuls, il y en aurait au moins un qui ne serait pas nul, mettons que ce soit a. Alors : $a\vec{i} + b\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow a\vec{i} = -b\vec{j}$ et donc, pouvant diviser par a qui n'est pas nul, on obtiendrait : $\vec{i} = \frac{-b}{a}\vec{j}$. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seraient colinéaires car $\vec{i} = k\vec{j}$.

C'est absurde puisque $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$ est un repère du plan. C'est prouvé !

4. Analysons pour commencer.
Supposons que x est une solution de l'équation proposée, que x vérifie $\sqrt{2x^2+6x+1} = x+2$. Alors on a : $(\sqrt{2x^2+6x+1})^2 = (x+2)^2$ et, donc, $2x^2+6x+1 = x^2+4x+4$ soit $x^2+2x-3=0$. Résolvant classiquement cette équation du second degré on obtient $x=-3$ ou $x=1$. Les seules solutions possibles sont donc -3 et 1.
Réciproquement, -3 est-il vraiment solution de l'équation ? Est-ce que -3 vérifie $\sqrt{2(-3)^2+6(-3)+1} = (-3)+2$ c'est-à-dire $\sqrt{1} = -1$? Non, car $\sqrt{1}$ est égal à 1 et pas à -1. Le réel -3 n'est donc pas solution. Et pour 1 ? Est-ce que 1 vérifie $\sqrt{2(1)^2+6(1)+1} = (1)+2$ c'est-à-dire $\sqrt{9}=3$? Oui, c'est vrai.

$$\boxed{\text{La solution de l'équation est } S=\{1\}.}$$

3. LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

C'est un raisonnement de type nouveau, souvent utilisé en Terminale, spécialement pour l'étude des suites. Vous avez dû voir, en Première, la formule suivante : pour tout entier naturel non nul n, on a $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Cette formule est, en fait, un condensé d'une infinité de propositions vraies : la proposition P_1 (« $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ »), la proposition P_2 (« $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$ »), la proposition P_3…
Donc cette formule indique que, pour tout n entier naturel non nul, la proposition P_n : «$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$» est vraie. Comment démontrer toutes ces propositions ? On ne peut pas le faire une par une, on n'en finirait pas. On utilise ce qu'on appelle un raisonnement par récurrence.

Imaginez un escalier infini dont vous devez prouver que vous savez monter toutes les marches. Comment ? Vous devez, premièrement, montrer que vous pouvez aller sur la première marche (initialisation du processus) et vous devez ensuite, prouver que, si vous êtes sur n'importe quelle marche, la marche numéro n, vous pouvez monter sur la suivante, la marche numéro $n+1$ (hérédité du processus). Voilà ce qu'est un raisonnement par récurrence. Pratiquement :

- Première étape (initialisation) : la proposition P_1 est vraie car $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
- Deuxième étape (hérédité) : supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

  P_n vraie $\Rightarrow 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 1+2+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 1+2+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

  Supposant P_n vraie on a obtenu $1+2+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui est exactement la vérité de P_{n+1}.

Conclusion : P_n est vraie pour tous les n, entiers naturels non nuls.

✍ Exercice d'application 3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 \end{cases}$.

1. Prouver par un raisonnement par récurrence que, pour tout n, $u_n \geq 0$.

2. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 6$.

3. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

4. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - \frac{6}{2^n}$.

Corrigé

1. Prouvons par récurrence, la vérité, pour tout n, de la proposition P_n : « $u_n \geq 0$ ».
Première étape (initialisation). La proposition P_0 est vraie car $u_0 = 0 \geq 0$.

Deuxième étape (l'hérédité). Supposons que la proposition P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n \geq 0$, et démontrons, sous cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$.
Supposons donc $u_n \geq 0$.

Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3$ est la somme de deux termes positifs et, donc, est positif : $u_{n+1} \geq 0$. P_{n+1} est donc vraie.

$$\boxed{\text{Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a } u_n \geq 0.}$$

On vient de monter que la suite est minorée par 0.

2. Prouvons par récurrence, la vérité, pour tout n, de la proposition Q_n : « $u_n \leq 6$ ».
Première étape (initialisation). La proposition Q_0 est vraie car $u_0 = 0 \leq 6$.
Deuxième étape (hérédité). Supposons que la proposition Q_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n \leq 6$, et démontrons, sous cette hypothèse, que Q_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 6$.
Supposons donc $u_n \leq 6$. Pour découvrir la situation de u_{n+1} par rapport à 6 on va étudier le signe de $u_{n+1} - 6$.

On a : $u_{n+1} - 6 = \dfrac{u_n}{2} + 3 - 6 = \; = \dfrac{u_n}{2} - 3 = \dfrac{1}{2}(u_n - 6)$.
Mais $u_n \leq 6 \Rightarrow u_n - 6 \leq 0$. Donc, par ricochet, $u_{n+1} - 6 \leq 0$ et, donc, $u_{n+1} \leq 6$, ce qu'on souhaitait prouver.

$$\boxed{\text{Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a } u_n \leq 6.}$$

On vient de monter que la suite est majorée par 6.
Finalement, cette suite est bornée par 0 et 6.

3. Prouvons par récurrence, la vérité, pour tout n, de la proposition R_n :

« $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ».

Première étape (initialisation). La proposition R_0 est-elle vraie ? A-t-on vraiment : $u_1 - u_0 \geq 0$? Il nous faut connaître u_1. On le calcule : $u_1 = \dfrac{u_0}{2} + 3 = 3$. Oui, R_0 est vraie puisque $u_1 - u_0 = 3 \geq 0$.
Deuxième étape (hérédité). Supposons que la proposition R_n est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, et démontrons, sous cette hypothèse, que R_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.
Supposons donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Alors $u_{n+2} - u_{n+1} = (\frac{u_{n+1}}{2} + 3) - (\frac{u_n}{2} + 3) = \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$

qui est positif par hypothèse.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

On vient de monter que la suite est croissante.

4. Prouvons par récurrence, la vérité, pour tout n, de la proposition T_n :

$$« u_n = 6 - \frac{6}{2^n} ».$$

Première étape (initialisation). La proposition T_0 est vraie car $u_0 = 0$ et $6 - \frac{6}{2^0} = 6 - 6 = 0$.

Deuxième étape (hérédité). Supposons que la proposition T_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = 6 - \frac{6}{2^n}$, et démontrons alors que T_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} = 6 - \frac{6}{2^{n+1}}$.

Supposons donc $u_n = 6 - \frac{6}{2^n}$

Alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 = \frac{6 - \frac{6}{2^n}}{2} + 3 = \frac{6}{2} - \frac{\frac{6}{2^n}}{2} + 3 = 3 - \frac{6}{2^n \times 2} + 3 = 6 - \frac{6}{2^{n+1}}$:

T_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $u_n = 6 - \frac{6}{2^n}$.