Sujet Amérique du Nord ♦ 2005

Exercice 1. (3 points)

Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.
Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.

2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.

a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?

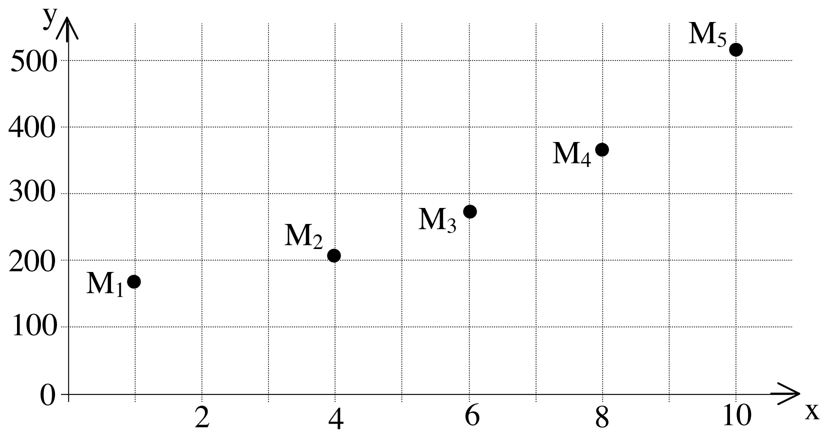
b) Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

Exercice 2. (5 points)

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (C.A.), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
C.A. y_i	176	209	284	380	508

1. Le nuage de points M_i (x_i ; y_i) est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal.



Un ajustement affine semble-t-il adapté ?

2. On pose $z_i = \ln y_i$.

a) Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i associées aux rangs x_i du tableau.

b) Construire le nuage de points $N_i(x_i ; z_i)$ dans le repère orthogonal défini de la façon suivante :

● sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année ;

● sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.

3.

a) Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près.

b) En déduire une relation entre y et x de la forme $y = A \times k^x$ (arrondir A à l'entier près et k à 10^{-2} près).

4.

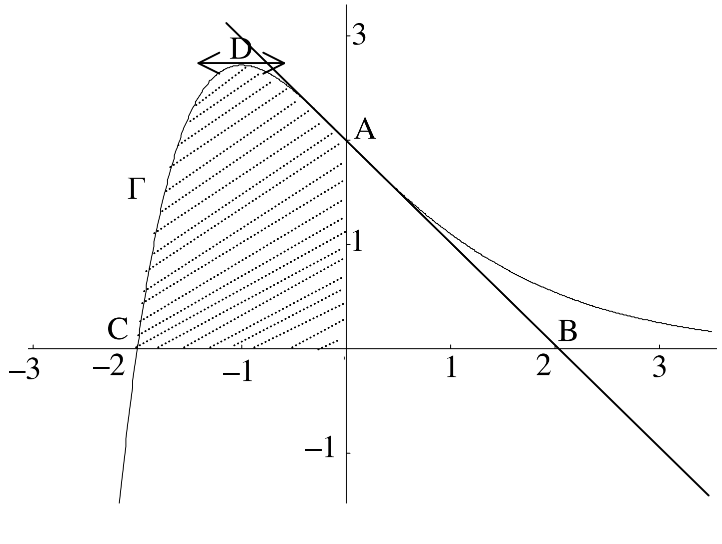
a) Tracer la droite d dans le même repère que celui du nuage de points (N_i).

b) Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.

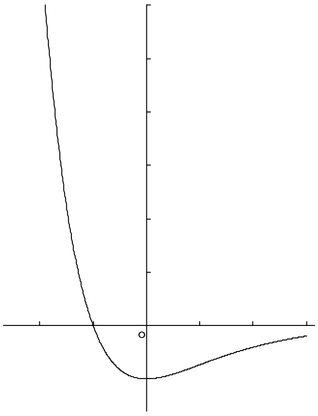
c) A partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

Exercice 3. (6 points)

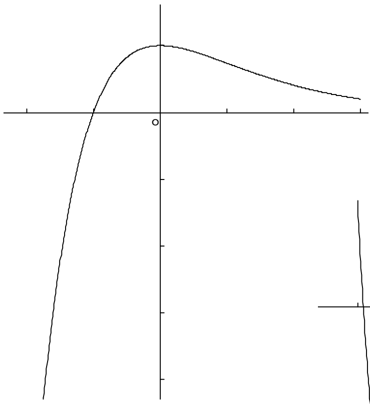
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur ℝ. La courbe Γ passe par les points A(0 ; 2) et C(−2 ; 0) et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse −1 est parallèle à l'axe des abscisses.



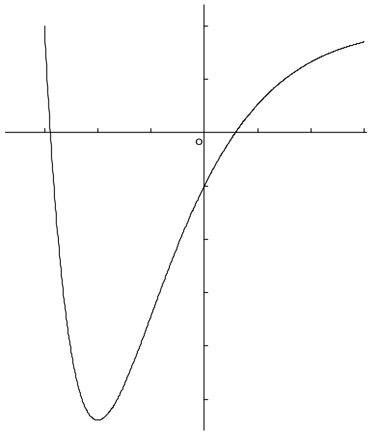
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessus, une représente la fonction dérivée f ' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la courbe associée à la fonction f ' et celle qui est associée à la fonction F.

Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix.

2.

a) Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de f(0) et de f '(0).

b) On suppose que f(x) est de la forme $f(x) = (x + K)e^{\alpha x}$ où K et α sont des constantes réelles.

Calculer f '(x) puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et α.

En déduire que f est définie par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

3.

a) Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est une primitive de f .

b) En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.

On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.

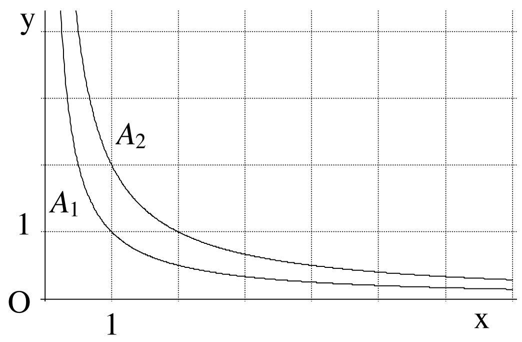
Exercice 4. (6 points)

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.

L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.
Barème : Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.
Compléter le document réponse.

QUESTIONS	REPONSES
1. Soit une série statistique à deux variables (x ; y). Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 1{,}35x + 22{,}8$. Les coordonnées du point moyen sont :	☐ (6,5 ; 30,575) ☐ (32,575 ; 6,5) ☐ (6,5 ; 31,575)
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison –5. Laquelle de ces affirmations est exacte ?	☐ Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 5$ ☐ $u_{10} = u_2 + 40$ ☐ $u_3 = u_7 + 20$
3. L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x + 1) + \ln(x - 1)$ est vraie pour tout x de :	☐ $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ ☐ $\mathbb{R} \setminus \{-1 , 1\}$ ☐ $]1 ; +\infty[$
4. Pour tout réel x, le nombre $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}$ est égal à :	☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 2}$ ☐ $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$
5. On pose $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1}dx$ et $J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1}dx$ alors I – J est égal à :	☐ $\ln\dfrac{2}{3}$ ☐ $\ln\dfrac{3}{2}$ ☐ $\dfrac{3}{2}$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1 - \dfrac{2}{100}\right)^x \leq 0{,}5$ est :	☐ $S = \left]-\infty ; \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)}\right]$ ☐ $S = \left[\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} ; +\infty\right[$ ☐ $S = \left[\ln\dfrac{0{,}5}{0{,}98} ; +\infty\right[$

Exercice 5. Spécialité (5 points)



Les courbes A_1 et A_2 représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équations :

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

On note $\mathcal{D}_2$ le domaine délimité par les courbes A_1 et A_2 et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

On note $\mathcal{D}'_2$ le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe A_1 et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

1. Colorier les domaines $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$ d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.

Soit n un entier naturel strictement positif.

On note u_n l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ délimité par les courbes A_1 et A_2 et les droites d'équations $x = n$ et $x = n + 1$.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
On pourra comparer les nombres $n(n + 2)$ et $(n + 1)^2$.

4. Étudier la convergence de la suite (u_n).

5. Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ reste supérieure à $\frac{1}{10}$ d'unité d'aire. Soit N cette valeur.

6. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes A_1 et A_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = N$.

Correction

Exercice 1.

1. Le pourcentage de baisse est le même chaque année, soit t %. Au bout de 5 ans, l'impôt I deviendra $I \times \left(1-\frac{t}{100}\right)^5$. Le gouvernement veut baisser l'impôt de 30 % ce qui revient à dire que l'impôt au bout de 5 ans doit être 0,7 × I. Il faut ainsi résoudre l'équation $0{,}7 \times I = I \times \left(1-\frac{t}{100}\right)^5$ où l'inconnue est t.

On simplifie par I et on peut utiliser la fonction ln, les deux membres de l'équation étant strictement positifs.

$\ln(0{,}7) = 5\ln\left(1-\frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow \ln\left(1-\frac{t}{100}\right) = \frac{\ln(0{,}7)}{5} \Leftrightarrow \left(1-\frac{t}{100}\right) = e^{\frac{1}{5}\ln 0{,}7}$.

On en tire $\frac{t}{100} = 1 - e^{\frac{1}{5}\ln 0{,}7} \Leftrightarrow t = 100\left(1 - e^{\frac{1}{5}\ln 0{,}7}\right) \Leftrightarrow t \approx 6{,}885$.

A 10^{-2} près, le pourcentage de baisse sera :

$$\boxed{6{,}89\ \%}$$

2. a) Le coefficient multiplicateur global définissant la baisse est :

$\left(1-\frac{5}{100}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\left(1-\frac{3}{100}\right) = 0{,}95 \times 0{,}99 \times 0{,}97 = 0{,}912285$

Avec les nouvelles données du texte, le pourcentage de baisse sur 3 ans est $1 - 0{,}912285$, soit à 10^{-2} près :

$$\boxed{8{,}77\ \%}$$

b) Pour atteindre son objectif de baisse de 30 % sur 5 ans, les deux dernières années connaissant une baisse de t %, on doit résoudre l'équation :

$\left(1-\frac{5}{100}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\left(1-\frac{3}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right)^2 = 0{,}7 \Leftrightarrow \left(1-\frac{t}{100}\right)^2 = \frac{0{,}7}{0{,}912285}$

$\left(1-\frac{t}{100}\right)^2 \approx 0{,}7673 \Leftrightarrow 1 - \frac{t}{100} \approx 0{,}87596 \Leftrightarrow \frac{t}{100} \approx 0{,}1240$.

Les deux dernières années, le pourcentage de baisse devra, à 10^{-2} près, être égal à :

$$\boxed{12{,}40\ \%}$$

Exercice 2.

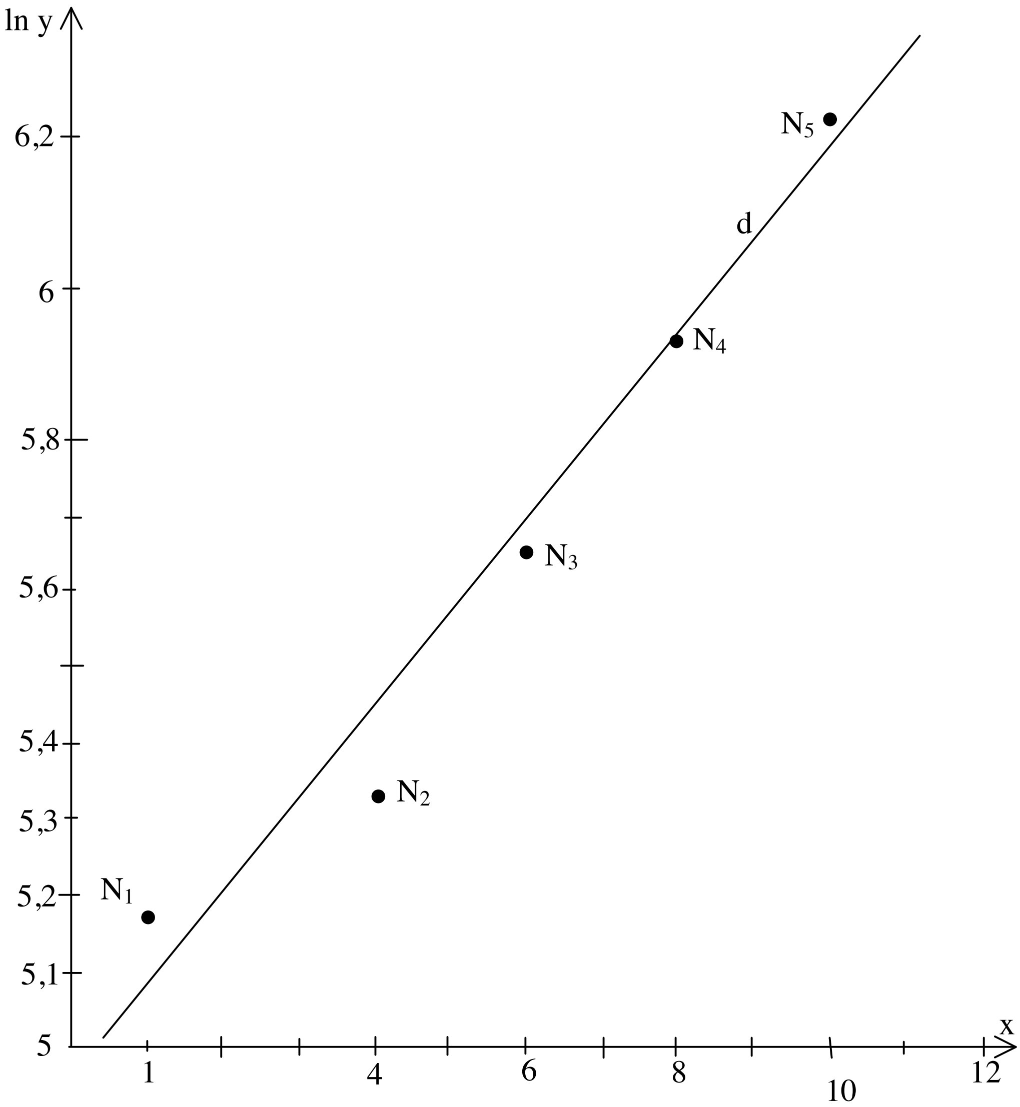
1. Le coefficient de corrélation donné par la calculatrice est $r \approx 0{,}957$.

Un ajustement affine ne semble pas adapté dans le cas du nuage de points de ce problème.

2. a)

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
C.A. y_i	176	209	284	380	508
$z_i = \ln y_i$	5,17	5,34	5,65	5,94	6,23

b) On peut placer les points N_i dans le repère indiqué dans le texte.



3. a) La calculatrice permet de déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x :

$$\boxed{z = 0{,}122x + 4{,}960}$$

b) On remplace z par ln y soit ln y = 0,122x + 4,96 ce qui donne :

$y = e^{0{,}122x + 4{,}96} = e^{4{,}96} \times e^{0{,}122x} = e^{4{,}96} \times \left(e^{0{,}122}\right)^x$

A l'entier près, $A = e^{4{,}96} \approx 143$ et à 10^{-2} près, $k = e^{0{,}122} \approx 1{,}13$:

$$\boxed{y = 143 \times 1{,}13^x}$$

4. a) Voir le tracé de la droite sur le graphique de la page précédente.

b) En 2005, x = 12 alors $z = 0{,}122 \times 12 + 4{,}96 = 6{,}424$.

On en déduit : $y = e^{6{,}424} \approx 616{,}4640452$. y est donné en millions d'euros.

Au millier d'euros près, en 2005, une estimation du chiffre d'affaires sera :

616,464 millions d'euros.

Remarque : On peut utiliser le résultat de la question 3. a) mais du fait des arrondis, l'estimation sera moins bonne.

$y = 143 \times 1{,}13^{12} \approx 619{,}837$ millions d'euros.

c) Compte tenu de l'unité choisie et du choix de la méthode d'estimation, le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros si :

$143 \times 1{,}13^x \geq 1\,000 \Leftrightarrow 1{,}13^x \geq \dfrac{1000}{143}$.

Les deux membres de l'inéquation sont strictement positifs et la fonction ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$: $x \ln 1{,}13 \geq \ln \dfrac{1\,000}{143}$.

Comme $\ln 1{,}13 > 0$: $x \geq \dfrac{\ln \dfrac{1000}{143}}{\ln 1{,}13}$. Or $\dfrac{\ln \dfrac{1000}{143}}{\ln 1{,}13} \approx 15{,}91$. On choisit pour rang x : 16.

Le chiffre d'affaires dépassera le milliard d'euros en 2009.

Exercice 3.

1. La représentation graphique de la fonction f permet de dresser un tableau de variations de cette fonction et d'en déduire le signe de sa dérivée f ', dérivée qui est nulle pour x = –1 abscisse du point où la tangente à la courbe est horizontale.

x	–∞	–2	–1	0	+∞
variations de f		0 ↗		↘ 2 ↘	0
signe de f '(x)		+	0	–	