Chapitre 1

Éléments de calcul intégral

Ce chapitre résume les principales notions et techniques de calcul d'intégrales. Lorsqu'une quantité est introduite (dérivée, intégrale...), il est supposé que celle-ci existe.

1.1 Points essentiels

Primitive : On appelle primitive de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ toute fonction F telle que

$$F'(x) = f(x).$$

Dans la suite, F désigne une primitive de f.

Propriétés élémentaires :

- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est une primitive de f.
- Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Primitives usuelles :

$f(x)$	x^α	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$e^{\alpha x}$	$\ln(x)$
$F(x)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$2\sqrt{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$x\ln(x) - x$
$f(x)$	a^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan^2(x) + 1$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$
$F(x)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\tan(x)$	$-\operatorname{cotan}(x)$
$f(x)$	$\tan(x)$	$\operatorname{cotan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$F(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$	$\arctan(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$

Primitive d'une fonction composée : Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue. Alors une primitive de $g(x) = u'(x)f(u(x))$ est $G(x) = F(u(x))$.

Exemples de primitives de fonctions composées :

$f(x)$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$F(x)$	$(u(x))^{\alpha}$	$2\sqrt{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$e^{u(x)}$

$f(x)$	$u'(x)\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
$F(x)$	$-\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	$\arcsin(u(x))$	$\arctan(u(x))$

Calcul intégral et primitive d'une fonction f continue :

- On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le réel
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
- On adopte la notation "crochet" : $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, donc
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Propriétés fondamentales :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
- Linéarité de l'intégration :
$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
- Relation de Chasles : pour tout $c \in]a, b[$, on a
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Techniques de calcul intégral : Soient $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables dont les dérivées sont continues.

- Intégration par parties :
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

- Changement de variable :
$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy.$$
On a fait le changement de variable : $y = u(x)$. Ainsi, on remplace $u(x)$ par y dans l'intégrale de départ, ce qui entraîne $dy = u'(x)dx$ et on détermine les bornes d'intégration pour y, *i.e.* $u(a)$ et $u(b)$.

Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive : Soit f une fonction positive. Alors
- pour tous $a \leq b$, on a $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- pour tout $[c,d] \subseteq [a,b]$, on a $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

Intégrale nulle : Si f est continue et de signe constant sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx = 0$ si, et seulement si, $f(x) = 0$, pour tout $x \in [a,b]$.

Majoration de l'intégrale :
- pour tous $a \leq b$, on a $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2dx}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2dx}.$$

Intégrale sur un intervalle centré en 0 :
- Si f est paire sur $[-a,a]$, *i.e.* $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-a,a]$, alors on a
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$
- Si f est impaire $[-a,a]$, *i.e.* $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-a,a]$, alors (si existence) on a
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Intégrale généralisée en $-\infty$ ou/et ∞ :
- $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\ell\to\infty} \int_a^\ell f(x)dx$,
- $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\ell\to-\infty} \int_\ell^b f(x)dx$,
- pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Intégrales de Riemann :

- L'intégrale $I(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ existe si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- L'intégrale $J(\beta) = \int_0^{1} \frac{1}{x^{\beta}} dx$ existe si, et seulement si, $\beta < 1$.

Note

La plupart des formules précédentes sont transposables aux fonctions continues par morceaux avec des primitives par morceaux, *i.e.* F est dérivable sur $[a, b]$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points et on a $F'(x) = f(x)$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points.

1.2 Exercices types

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 dx, \qquad J = \int_1^3 2dx.$$

Solution 1. On a

$$I = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1-0 = 1, \quad J = \int_1^3 2dx = 2\int_1^3 dx = 2[x]_1^3 = 2(3-1) = 4.$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 xdx, \qquad J = \int_0^1 (2+x^5)dx, \qquad K = \int_{-1}^0 x(1-x)(1+x)dx.$$

Solution 2. On a

$$I = \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (2+x^5)dx = \left[2x + \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 2\times 1 + \frac{1^6}{6} - \left(2\times 0 + \frac{0^6}{6}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{6} - 0 = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

On a $x(1-x)(1+x) = x(1-x^2) = x - x^3$. D'où

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^{0} x(1-x)(1+x)dx = \int_{-1}^{0} (x-x^3)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \sqrt{x}(2+\sqrt{x})dx, \qquad J = \int_4^9 \frac{|x-10|}{\sqrt{x}}dx, \qquad K = \int_{-1}^{3} |x|^3 dx.$$

Solution 3. On a $\sqrt{x}(2+\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + x$. Il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{x}(2+\sqrt{x})dx = \int_0^1 (2\sqrt{x}+x)dx = \left[2 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}1^{\frac{3}{2}} + \frac{1^2}{2} - \left(\frac{4}{3}0^{\frac{3}{2}} + \frac{0^2}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [4,9]$, on a $x - 10 < 0$, donc $|x-10| = 10 - x$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} J &= \int_4^9 \frac{|x-10|}{\sqrt{x}}dx = \int_4^9 \frac{10-x}{\sqrt{x}}dx = \int_4^9 \left(\frac{10}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)dx \\ &= \left[10 \times 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 = 20\sqrt{9} - \frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} - \left(20\sqrt{4} - \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= 60 - 18 - 40 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

En décomposant suivant les valeurs négatives et positives de x, et en utilisant la définition de la valeur absolue, il vient

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^{3} |x|^3 dx = \int_{-1}^{0} |x|^3 dx + \int_0^3 |x|^3 dx = \int_{-1}^{0} (-x)^3 dx + \int_0^3 x^3 dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_0^3 x^3 dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 \\ &= -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) + \left(\frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{81}{4} = \frac{82}{4} = \frac{41}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x)dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)dx, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx.$$

Solution 4. On a

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2.$$

Une primitive de $\sin(x)\cos(x)$ est $\frac{1}{2}(\sin(x))^2$. D'où

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)dx = \left[\frac{1}{2}(\sin(x))^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}(\sin(0))^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, il vient

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \tan^2(x) + 1.$$

Or une primitive de $\tan^2(x) + 1$ est $\tan(x)$. D'où

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2(x) + 1)dx = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 e^{-x}dx, \qquad J = \int_1^2 \frac{1}{x}dx, \qquad K = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx.$$

Solution 5. On a

$$I = \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = -e^{-1} + 1.$$

On a

$$J = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \ln(2).$$

Une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$ est $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$. D'où

$$\begin{aligned} K &= \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(2))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln(2))^2 - 0 = \frac{1}{2}(\ln(2))^2. \end{aligned}$$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{x + x^3 + 1}{1 + x^2}dx, \qquad J = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx, \qquad K = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx.$$

Solution 6. On a $x + x^3 + 1 = x(1 + x^2) + 1$, donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x + x^3 + 1}{1 + x^2}dx = \int_0^1 \frac{x(1 + x^2) + 1}{1 + x^2}dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x(1 + x^2)}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \arctan(x)\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} + \arctan(1) - \left(\frac{0^2}{2} + \arctan(0)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On a $x - 1 = x + 1 - 2$, donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1-2}{x+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - 2\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - 2\frac{1}{x+1}\right)dx = [x - 2\ln(x+1)]_0^1 \\ &= 1 - 2\ln(2) - (0 - 2\ln(1)) = 1 - 2\ln(2) - 0 = 1 - 2\ln(2). \end{aligned}$$

On a $1 = 1 + 0 = 1 + e^x - e^x$, donc

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x - e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = [x - \ln(1+e^x)]_0^1 \\ &= 1 - \ln(1+e^1) - (0 - \ln(1+e^0)) = 1 - \ln(e+1) + \ln(2) \\ &= 1 + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right). \end{aligned}$$

Exercice 7

On pose
$$I=\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+\sqrt{x})dx.$$
En faisant le changement de variable : $y=1+\sqrt{x}$, calculer I.

Solution 7. En faisant le changement de variable : $y=1+\sqrt{x} \Rightarrow x=(y-1)^2$ (aussi : $x=1 \Rightarrow y=2$, $x=4 \Rightarrow y=3$ et $dx=2(y-1)dy$), il vient
$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+\sqrt{x})dx = \int_2^3 \frac{1}{y-1}\ln(y)\times 2(y-1)dy = 2\int_2^3 \ln(y)dy \\ &= 2\left[y\ln(y)-y\right]_2^3 = 2\left(3\ln(3)-3-(2\ln(2)-2)\right) = 6\ln(3)-4\ln(2)-2 \\ &= \ln\left(\frac{3^6}{2^4}\right)-2. \end{aligned}$$

Exercice 8

On pose
$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$
En faisant le changement de variable : $y=\arcsin(x)$, calculer I.

Solution 8. En faisant le changement de variable : $y=\arcsin(x)$ (aussi : $x=0 \Rightarrow y=0$, $x=1 \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}$ et $dx=\cos(y)dy$), et en utilisant l'égalité : $\cos^2(y)+\sin^2(y)=1$, $y\in\mathbb{R}$, il vient
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin(y))^2}\cos(y)dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos(y))^2}\cos(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\cos(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)dy. \end{aligned}$$
En utilisant l'égalité : $\cos^2(y)=\frac{1+\cos(2y)}{2}$, $y\in\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2y)}{2}dy = \frac{1}{2}\left[y+\frac{1}{2}\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin(2\times 0)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 9

On pose
$$I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx, \qquad J=\int_0^1 \ln(1+x^2)dx.$$

1. Calculer I.
2. En faisant une intégration par parties, calculer J.