CHAPITRE 1 – LES POURCENTAGES

À la fin de ce chapitre vous maîtriserez :

- La variation moyenne d'une grandeur $\frac{\Delta Y}{\Delta T} = \frac{Y_2 - Y_1}{T_2 - T_1}$
- Le coefficient multiplicateur $CM = \frac{Y_2}{Y_1}$
- Le taux de variation $t = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1}$
- Les variations successives et le produit des coefficients multiplicateurs
- Le taux moyen de n taux de variation $(1+t)^n = (1+t_1)(1+t_2)...(1+t_n)$
- L'inflation et les indices de prix
- La relation de FISHER $1+i = (1+i^*).(1+f).(1+\varepsilon)$
- Les prix PAHT, PRHT, PVHT et la Marge
- Le Taux de Marque et le Taux de Marge
- Les Taux de TVA et le PVTTC

1 – LES OBJECTIFS

L'Insee indique dans une étude statistique sur "*Emploi et population active*" les nombres d'emplois salariés et non salariés pour la France métropolitaine de 2005 à 2007 et les prévisions pour 2008 en fin d'année, en milliers, hors départements d'outre-mer :

en milliers

Année	2005	2006	2007	2008
Emploi salarié total	23 390,3	23 676,4	24 008,8	23 854,2
Emploi non salarié total	2 314,3	2 335,8	2 355,2	2 371,3
Totaux	25 704,6	26 012,2	26 364,0	26 225,5

Emploi salarié et non salarié au 31 décembre - http://www.insee.fr/

On peut amorcer une analyse :

a) Y a-t-il eu création d'emploi non salarié ?

Dans l'absolu on note un accroissement de 2 371,3 – 2 314,3 = 57 milliers d'emplois entre 2005 et 2008, soit une *variation moyenne annuelle* de 19 milliers d'emplois.
On observe en première analyse la création d'emplois.

b) Une autre analyse consiste à observer des *pourcentages* :

- On a 2 371,3 / 2 314,3 = 1,02462, ainsi on note 2,46 % d'augmentation entre 2005 et 2008, donc sur 3 ans.
- Pour chaque année, on a de même :
  ◊ de 2005 à 2006, 2 335,8 / 2 314,3 = 1,00929, soit 0,93 %,
  ◊ de 2006 à 2007, 2 355,2 / 2 335,8 = 1,00831, soit 0,83 %,
  ◊ de 2007 à 2008, 2 371,3 / 2 355,2 = 1,00684, soit 0,68 %.

c) Attention aux conclusions hâtives !

On constate que $0{,}93 + 0{,}83 + 0{,}68 = 2{,}44$ qui diffère de 2,46 %
Par contre, on a la relation $1{,}00929 \times 1{,}00831 \times 1{,}00684 = 1{,}02462$
On est alors conduit à la notion de *Coefficient Multiplicateur*.

Cet exemple nous montre que les pourcentages constituent un outil de base en gestion et en économie pour définir et analyser une structure, pour comparer des situations.

Mais on doit respecter quelques règles importantes de mathématiques…

%+%≠%

2 – LES DÉFINITIONS

① *La variation absolue d'une grandeur*

Lorsqu'une grandeur Y passe de la valeur Y_1 à la date T_1 à la valeur Y_2 à la date T_2, la *variation absolue* de cette grandeur est :

$$\boxed{\Delta Y_1 \triangleq Y_2 - Y_1 \quad (1.1)}$$

② *La variation moyenne d'une grandeur (par unité de temps)*

La *variation moyenne* de la grandeur Y entre les dates T_1 et T_2 où elle prend les valeurs respectives Y_1 et Y_2 est le nombre défini par :

$$\boxed{\frac{\Delta Y}{\Delta T} \triangleq \frac{Y_2 - Y_1}{T_2 - T_1} \quad (1.2)}$$

③ *Le coefficient multiplicateur*

Le *coefficient multiplicateur*, noté souvent CM, permet d'exprimer Y_2 en fonction de Y_1 selon les relations :

$$\boxed{CM \triangleq \frac{Y_2}{Y_1} \quad (1.3)}$$

La relation (1.3) s'écrit aussi :

$$\boxed{Y_2 = Y_1 \cdot CM \quad (1.4)}$$

④ *Le taux de variation*

Le *taux de variation* de la grandeur Y qui passe de la valeur Y_1 à la valeur Y_2 entre les instants T_1 et T_2 est le nombre t défini par :

$$\boxed{t \triangleq \frac{\Delta Y}{Y_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1} \quad (1.5)}$$

A priori, en gestion ou pour des grandeurs physiques, on se limite à des valeurs de t au moins égales à –1.

La définition (1.5) s'écrit encore : $t = \frac{Y_2}{Y_1} - 1$.

Ce qui permet de relier t et CM :

$$\boxed{t = CM - 1 \quad (1.6)} \text{ ou encore } \boxed{CM = 1 + t \quad (1.7)}$$

et on a la relation entre Y_2 et Y_1 :

$$\boxed{Y_2 = Y_1 \cdot (1 + t) \quad (1.8)}$$

Si t est exprimé sous la forme d'un *pourcentage*, on a :

$$\boxed{t \triangleq 100 \cdot \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1} \quad (1.9)}$$

et le *coefficient multiplicateur* devient :

$$\boxed{CM = 1 + \frac{t}{100} \quad (1.10)}$$

Remarque 1 : il est clair que si on a $Y_2 < Y_1$, alors le taux de variation devient négatif.

Remarque 2 : le taux de variation est parfois associé à :

- *la période 1, comprise entre les dates d_0 et d_1. On le note t_1.*
- *la période 2, comprise entre les dates d_1 et d_2. On le note t_2.*
- *…*
- *la période n, comprise entre les dates d_{n-1} et d_n. On le note t_n.*

⑤ *La valeur acquise par un capital*

La *valeur acquise* par un capital C_0 à la date 0, après 1 période de placement au *taux d'intérêt* i pour 1 euro et 1 période est, par définition, le capital C_1 dont la valeur est :

$$\boxed{C_1 = C_0 \cdot (1 + i) \quad (1.11)}$$

> *Autrement dit, i est le taux de variation au cours d'une période du capital C_0 (C_0 est la valeur du capital au début de la période).*
> *100.i est le pourcentage de variation de C_0 au cours d'une période.*

%+%≠%

3 – DES EXEMPLES REMARQUABLES

① *Diminution de la grandeur*

Les évaluations de la population en France, fondées sur les "estimations de population et statistiques de l'état civil" de 2008, indiquent qu'une estimation du nombre des naissances vivantes est passée de 829,3 milliers en 2006 à 818,7 milliers en 2007. Calculez le taux de variation du nombre des naissances.
(Sources : Insee, estimations de population et statistiques de l'état civil)

✍ Le *taux de variation* annuel du nombre des naissances, en France, entre 2006 et 2007 est $\frac{818{,}7-829{,}3}{829{,}3}$.

Sa valeur est donc $-0{,}0128$. Le *pourcentage de variation* est $-1{,}28\,\%$.
Il s'agit d'une diminution de 1,28 %.

Le *coefficient multiplicateur* est $\frac{818{,}7}{829{,}3}$, soit : $CM = 0{,}9872$.

On retrouve bien le *taux de variation* t = CM – 1 = − 0,0128.

② *Augmentation de la grandeur*

Pendant la même période d'observation, la population française passait de 63 186 milliers à 63 578 milliers. Calculez le taux de variation de la population.

✍ Le *taux de variation* du nombre d'habitants, en France, entre 2006 et 2007 est :

$$\frac{63\,578-63\,186}{63\,186}$$

Sa valeur est donc 0,0062. Le *pourcentage de variation* est $0{,}62\,\%$.
Il s'agit d'une augmentation de 0,62 %.

Le *coefficient multiplicateur* est $\frac{63\,578}{63\,186}$, soit $CM = 1{,}0062$.

On retrouve bien le *taux de variation* t = CM – 1 = 0,0062.

Remarque : Ces exemples montrent la prudence à adopter face à des analyses qui peuvent être incomplètes...
En fait la population ne baisse pas ; elle augmente seulement moins vite que pendant la période précédente.
En effet, la population française en 2005 était de 62 731 milliers. Le pourcentage de variation de 0,72 % est effectivement supérieur à 0,62 %.

③ *À la Bourse*

Le cours de l'action de France Telecom et celui de l'action Castorama sont étudiés dans le tableau ci-dessous :

Cours de l'action	*Clôture du 9 juin 2010*	*Clôture du 10 juin 2010*
DASSAULT AVIATION	*609,50 €*	*600,01 €*
BNP PARIBAS	*42,32 €*	*43,82 €*

Calculez le pourcentage de variation et le coefficient multiplicateur ainsi définis pour chacune de ces actions.

Le <u>*taux de variation*</u> de l'action DASSAULT AVIATION entre le 9/06/2010 et le 10/06/2010 est :

$$\frac{600{,}01-609{,}50}{609{,}50}$$

Sa valeur est $-0{,}0156.$ Le <u>*pourcentage de variation*</u> entre ces deux dates est $-1{,}56\ \%.$

Il s'agit d'un <u>*pourcentage de diminution*</u> de 1,56 %.

Le <u>*coefficient multiplicateur*</u> est $\frac{600{,}01}{609{,}50}$, soit : $CM = 0{,}9844.$

On retrouve bien le <u>*taux de variation*</u> t = CM – 1 = –0,0156, soit –1,56 %.

Pour l'action BNP PARIBAS, des calculs similaires conduisent aux valeurs :

- <u>*coefficient multiplicateur*</u> : $CM = 1{,}0354,$
- <u>*taux de variation*</u> : $t = 0{,}0354,$
- <u>*pourcentage d'augmentation*</u> : $3{,}54\ \%.$

④ *Calcul du taux d'intérêt d'un placement*

M. FIMAT place à sa banque 100 000 € et obtient 1 an après 105 000 €.
Précisez le pourcentage de variation du capital placé.

Le <u>*taux de variation*</u> du capital de M. FIMAT est :

$$\frac{105000}{100000}-1.$$

Sa valeur est donc $0{,}05.$ Le <u>*pourcentage de variation*</u> sur 1 an est $5\ \%.$

Le <u>*taux d'intérêt annuel*</u> de son placement est $5\ \%.$ On dit aussi que le <u>*taux de rendement annuel*</u> de son capital est $5\ \%.$

⑤ *Treize à la douzaine*

Un client achetant 12 produits, valant 91 € pièce, se voit bénéficier d'un produit gratuit supplémentaire. Il obtient donc 13 articles pour le prix de 12.
Quel est le taux de variation du prix d'un produit ?

✍ Le prix des 12 articles achetés est : $91 \times 12 = 1\,092$ €.

Ce prix est celui des 13 produits obtenus, dont la valeur unitaire est $\frac{1\,092}{13} = 84$ €.

Le *coefficient multiplicateur* est donc $\frac{84}{91}$, soit CM = 0,9231.

Le *taux de variation* est t = CM – 1 = –0,0769.

Le client a donc bénéficié d'une *baisse* de 7,69 %. sur le prix de l'article.

Remarque : Le coefficient multiplicateur n'est autre que le rapport $\frac{12}{13} = 0{,}9231.$

En effet on a : $\frac{84}{91} = \frac{\frac{1092}{13}}{91} = \frac{\frac{91 \times 12}{13}}{91} = \frac{12}{13}.$

%+%≠%